Chapitre 2 : Probabilités

Fiche 3 : Loi binomiale & Loi de Poisson

1 Loi binomiale

1.1 Introduction

On considère une expérience aléatoire qui a deux issues possibles : réussite ou échec. On notera p la probabilité de réussite et q la probabilité d'échec. On a alors $p + q = 1$. Une telle expérience est appelée épreuve de Bernoulli[1].

Exemple 1 : une épreuve consiste à lancer un dé. On gagne si l'on obtient un 6.
On a donc $p = \frac{\dots}{\dots}$ et $q = \frac{\dots}{\dots}$

On répète maintenant n fois la même épreuve de Bernoulli, de façon à ce que chaque épreuve soit indépendante des autres. On note alors X la variable aléatoire égale au nombre total de succès. La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres n et p, et notée $\mathcal{B}(n, p)$.

Exemple 2 : on lance 5 fois de suite un dé. X est alors le nombre de réussites, c'est-à-dire le nombre de 6 obtenus.
Calculer $P(X = 0)$ et $P(X = 3)$.
Compléter la loi de probabilité de X :

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$						

1.2 Définition et propriétés de la loi binomiale

Définition 1
Soit $n \in \mathbb{N}$, $p \in [-1; 1]$ et X une variable aléatoire.
On dit que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p, et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$, lorsque :
- L'ensemble des valeurs prises par X est : $X(\Omega) = \{0; 1; 2; \dots; n\}$.
- Pour tout $k \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$, $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, avec $q = 1 - p$.

Théorème 1 (admis)
Soit $n \in \mathbb{N}$, $p \in [-1; 1]$ et X une variable aléatoire. On note $q = 1 - p$.
Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors :

$$E(X) = np \qquad V(X) = npq \qquad \sigma_X = \sqrt{npq}$$

1.3 Critères permettant d'utiliser la loi binomiale

Il faut savoir justifier l'utilisation d'une loi binomiale dans une situation donnée. Pour cela, on vérifiera les points suivants :

- on a affaire à une épreuve de Bernoulli comportant deux issues possibles réussite et échec, de probabilités p et q respectivement.
- On répète n fois cette épreuve et les n réalisations sont indépendantes (c'est notamment le cas des tirages avec remise).
- La variable aléatoire X est égale au nombre de réussites.

Dans ces conditions, on peut conclure que X suit la loi binomiale de paramètres n et p : $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$

Exercices à faire : exercices 1 à 3 de la fiche "Loi binomiale, loi de Poisson".

[1] Jacques Bernoulli (1654-1705) : mathématicien et savant suisse.

2 Loi de Poisson

2.1 Introduction

La loi de Poisson[2] est utilisée lorsqu'on étudie un phénomène rare dans certaines conditions.
Exemples typiques d'utilisation de la loi de Poisson : X est le nombre de voitures qui passent à un péage par tranche de 15 min ; X est le nombre de fautes de frappe par page de cours de maths (il s'agit là d'événements très rares).

2.2 Définition et propriétés de la loi de Poisson

Définition 2
Soit λ un réel strictement positif et X une variable aléatoire.
On dit que la variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$, lorsque :
- L'ensemble des valeurs prises par X est l'ensemble de tous les entiers naturels : $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Théorème 2 (admis)
Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et X une variable aléatoire.
Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors :

$$E(X) = \lambda \qquad V(X) = \lambda \qquad \sigma_X = \sqrt{\lambda}$$

Remarque : On peut utiliser une table de la loi de Poisson pour déterminer les nombres $P(X = k)$ pour différentes valeurs de λ et de k. Une telle table figure sur le formulaire de l'examen, elle sera utilisée en exercices.

Exercices à faire : exercices 4 et 5 de la fiche "Loi binomiale, loi de Poisson".

[2]Siméon Denis Poisson (1781-1840) : mathématicien et homme politique français.