COURS MATHÉMATIQUES TERMINALE A_4

Ferdinand K. Kpotufe[1]

2015-2016

SCEA
Sciences & Applications

1. Enseignant de Mathématiques((+228) 98 66 60 26 / 93 12 15 63)

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

ALGÈBRE

CHAPITRE 1

ÉQUATIONS-INÉQUATIONS-SYSTÈMES

Sommaire

1.1 Polynôme et équation du second degré

Définition 1.1. *On appelle* ***polynôme du*** 2^{nd} ***degré****, tout polynôme de la forme* $ax^2 + bx + c = P(x)$ *avec* $a \neq 0$ *et* b, c *sont des réels. Il est aussi connu sous le nom de* ***trinôme****.*

1.1.1 Forme canonique

Activité 1.1. *Mettre sous forme canonique les trinômes suivants :*

- $P(x) = 3x^2 + 4x + 1$

- $Q(x) = -2x^2 + 3x + 4$

Solution.

$P(x) = 3\left[\left(x+\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} + \frac{1}{3}\right] = 3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right]$

$Q(x) = -2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - 2\right] = -2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{41}{16}\right]$

Cas général : La forme canonique d'un polynôme du second degré défini par :
$P(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$
est : $P(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ où $\Delta = b^2 - 4ac$

1.1.2 Résolution d'équations du 2^{nd} degré : méthode du discriminant

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(E) : ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 \tag{1.1}$$

<u>Démarche de Résolution</u>

L'expression notée $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelée discriminant de l'équation (E).
Une fois Δ calculé, on a les situations suivantes :

$$\begin{cases} \bullet Si\ \Delta < 0\ alors\ (E) \text{ n'admet pas de solution dans } \mathbb{R} : \quad S_{(E)} = \emptyset \\ \bullet Si\ \Delta = 0\ alors\ (E) \text{ admet une seule solution} x = -\frac{b}{2a} \text{ dite solution double :} S_{(E)} = \left\{-\frac{b}{2a}\right\} \\ \bullet Si\ \Delta > 0\ alors\ (E) \text{ admet deux solutions distinctes } x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\ et\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \qquad \Rightarrow \underline{S_{(E)} = \{x_1; x_2\}} \end{cases}$$

Exemple 1.1. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations*

(E_1) : $2x^2 + 3x - 5 = 0$

(E_2) : $x^2 + x + 1 = 0$

(E_3) : $\frac{1}{4}x^2 + x + 1 = 0$

Solution $S_1 = \left\{-\frac{5}{2}, 1\right\}$ $\quad S_2 = \emptyset$ $\quad S_3 = \{-2\}$

1.1.3 Factorisation d'un polynôme du 2^{nd} degré

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $(a \neq 0)$
On calcul : : $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\begin{cases} \bullet Si\ \Delta < 0, P(x) \text{ n'est pas factorisable} \\ \bullet Si\ \Delta = 0, P(x) \text{ admet une racine dite double } x_0 = \frac{-b}{2a} \text{ et on a :} \\ \qquad P(x) = a(x-x_0)^2 = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \\ \bullet Si\ \Delta > 0, P(x) \text{ admet deux solutions distinctes } x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et on a :} \\ \qquad P(x) = a(x-x_1)(x-x_2) \end{cases}$$

Exemple 1.2. *Factoriser les polynômes suivants :*

1) $P_1(x) = 2x^2 + 3x - 5$

2) $P_2(x) = x^2 + x + 1$

3) $P_3(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$

Solution $P_1(x) = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x-1)$. P_2 n'est pas factorisable. $P_3(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2$.

1.1.4 Somme et Produit des solutions d'une équation du 2^{nd} degré

Soit une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ admettant deux solutions x_1 et x_2 ($\Delta \geq 0$), la somme S et le produit P de ces solutions sont donnés par :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} S = x_1 + x_2 \\ S = -\dfrac{b}{a} \end{array}\right. \quad \Bigg| \quad \left\{\begin{array}{l} P = x_1 x_2 \\ P = \dfrac{c}{a} \end{array}\right.}$$

Exemple 1.3. *Soit l'équation :* $-x^2 + 3x + 2 = 0$*. Vérifier si cette équation admet des solutions et en déduire,si possible,sans calculer* x_1, x_2*, la somme* S *et le produit* P *des solutions.*

Solution Comme $\Delta = 17 > 0$ donc l'équation : $-x^2 + 3x + 2 = 0$ admet des solutions.
Ainsi $S = \frac{-2}{-1} = 2$ et $P = \frac{3}{-1} = -3$

1.1.5 Détermination de deux inconnus sachant leur somme et leur produit

Pour déterminer deux inconnus réels sachant leur somme S et leur produit P, il suffit de résoudre l'équation :

$$(E) : X^2 - SX + P = 0 \tag{1.2}$$

Exemple 1.4. *Déterminer deux nombres réels* x *et* y *sachant que leur somme est* 28 *et leur produit est* 195

Solution $S = \{(15, 13); (13, 15)\}$

1.2 Inéquations du 1^{er} et du 2^{nd} degré

1.2.1 Inéquations du 1^{er} degré

Soit $P(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$.
Ce polynôme est appelé ***polynôme du premier degré*** et les inéquations de la forme $P(x) \leq 0; P(x) < 0; P(x) > 0$ et $P(x) \geq 0$ sont appelées ***inéquations du premier degré***.
Résolution : Pour résoudre l'une de ces inéquations, on peut utiliser ***un tableau de signe puis on conclut***.
On pose $P(x) = 0$ qui devient $ax + b = 0$ et par suite $x = -\frac{b}{a}$

Tableau de signe de $P(x) = ax + b$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$P(x)$		signe de $-a$	0	signe de a	

Exemple 1.5. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $-2x + 4 \leq 0$

Solution $S = [2, +\infty[$

1.2.2 Inéquations du 2^{nd}degré

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$
Pour résoudre l'une des inéquations : $P(x) \leq 0; P(x) < 0; P(x) > 0$ et $P(x) \geq 0$, on représente le tableau de signe de $P(x)$ qui est obtenu d'après le signe de Δ, puis on en déduit la solution. Ainsi on a :

Tableau de signe de $P(x) = ax^2 + bx + c, \Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	

Tableau de signe de $P(x) = ax^2 + bx + c, \Delta = 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de a	

Tableau de signe de $P(x) = ax^2 + bx + c, \Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe opposé de a	0	signe de a	

Exercice 1.1. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les inéquations suivantes :*

(I_1) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$

(I_2) $5x^2 - x + 1 < 0$

(I_3) $-2x^2 + 8x + 3 < 0$

1.3 Equations-Inéquations du 3^e degré et bicarrées

1.3.1 Equations-Inéquations du 3^e degré

Activité 1.2. *On considère le polynôme* $P(x) = x^3 - x^2 + x + 3$

1. Vérifier que -1 est une racine de $P(x)$
2. Déterminer les réels a, b et c tels qu'on ai : $P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$
4. Etudier le signe de $P(x)$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leq 0$

.

1. $P(-1) = 0$
2. $a = 1, b = -2$ et $c = 3$

3. $S = \{-1\}$
4. Signe
$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, -1], P(x) \leqslant 0 \\ \forall x \in]-1, +\infty[, P(x) > 0 \end{cases}$
5. $S_{(I)} =]-\infty, -1]$

Exercice 1.2. *Reprendre l'activité 1.2 pour* $P(x) = -x^3 + 4x^2 - x - 6$

1.3.2 Equations-Inéquations bicarrées

Toute équation de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0)$ est appelée équation bicarrée.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(E) : ax^4 + bx^2 + c = 0 \tag{1.3}$$

Pour résoudre une telle équation, on peut effectuer un ***changement d'inconnue*** en posant :

$$\boxed{X = x^2}$$

et l'équation 1.3 devient :

$$(E') : aX^2 + bX + c = 0 \tag{1.4}$$

On calcule le discriminant Δ pour trouver les solutions de l'équation 1.4, puis on repose le changement d'inconnue pour trouver les solutions de l'équation 1.3.

Exemple 1.6. *Soit l'équation* $P(x) = 0$ *où* $P(x) = x^4 + 2x^2 - 3$

1. *Résoudre cette équation*
2. *Déduire une factorisation de* $P(x)$*.*
3. *En déduire le signe de* $P(x)$*, puis les solutions de l'inéquation* $P(x) < 0$*.*

Solution.

1. $S = \{-1; 1\}$
2. $P(x) = (x^2 + 3)(x - 1)(x + 1)$
3. Signe
$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, -1] \cup [-1, +\infty[, P(x) \geqslant 0 \\ \forall x \in]-1, 1[, P(x) < 0 \end{cases}$
Déduction : $S_{(I)} =]-1, 1[$

1.4 Système d'équations et d'inéquations

1.4.1 Système d'équations à deux équations et à deux inconnues dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Pour résoudre un système de deux équations dans $R \times \mathbb{R}$, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- ♣ ***Méthode de substitution*** : elle consiste à exprimer à partir d'une équation, une inconnue en fonction de l'autre et on la remplace dans l'autre équation.

Exemple 1.7. *Résoudre le système suivant dans* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *par la méthode de substitution :*

$$\begin{cases} 2x + y & = & 3 \\ -3x + 5y & = & 2 \end{cases}$$

Solution $S = \{(1,1)\}$

♣ ***Méthode de combinaison*** : Elle consiste à déduire une nouvelle équation à une seule inconnue en faisant la somme membre à membre les équations du système de telle sorte à éliminer une inconnue.

Exemple 1.8. *Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par la méthode de combinaison :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 4 \\ 3x + 5y & = & 5 \end{array}\right.$$

Solution $S = \{(5,-2)\}$

1.4.2 Utilisation d'un changement de variable

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants.

$$(\Sigma_1)\left\{\begin{array}{rcl} 2x^2 - y & = & 1 \\ x^2 + y & = & 0 \end{array}\right. \qquad (\Sigma_2)\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{3}{y+1} & = & -1 \\ \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{y+1} & = & 2 \end{array}\right.$$

1.4.3 Autres formes de systèmes

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants.

$$(\Sigma_3)\left\{\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & 5 \\ xy & = & -2 \end{array}\right. \qquad (\Sigma_4)\left\{\begin{array}{rcl} x - y & = & 2 \\ xy & = & 35 \end{array}\right.$$

Indications
♣ Pour le système (Σ_3), il faut remarquer $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$
♣ Pour le système (Σ_4), il faut remarquer $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$

1.4.4 Système d'inéquation

Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système d'inéquation suivant :

$$(\Sigma_5)\left\{\begin{array}{ccc} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ 2x + 3y & \geq & 3 \\ x - y & \leq & 0 \end{array}\right.$$

1.5 Exercices d'entraînement

1.5.1 Exercices de niveau 1

Exercice 1

Mettre sous forme canonique les trinômes suivants :

1. $x^2 + 2x + 3$;
2. $4x^2 + 2x - 3$;
3. $x^2 - 4x + 8$;
4. $-x^2 + 4x - 8$;

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants :

- Déterminer, s'il existe, les racines de $f(x)$;
- factoriser le trinôme si cela est possible ;
- déterminer son signe suivant les valeurs de x.

a) $f(x) = -2x^2 - 5x + 3$

b) $f(x) = x^2 + 6x + 16$

c) $f(x) = -3x^2 + 6x - 1$

d) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$(E_1) : 2 - x = 4 - x^2$ $\quad (E_2) : 5x^2 - 8x + 5 = 0$

$(E_3) : \dfrac{2}{x} = x - 1$ $\quad (I_1) : x^2 - 4x + 4 \geq 0$

$(I_2) : -2x^2 + 8x + 3 > 0$ $\quad I_3) : \dfrac{x-2}{x+1} < \dfrac{2x+5}{x}$

Exercice 4

1. Trouver les valeurs des réels x et y connaissant leur somme S et leur produit P :
   a) $S = 29$ et $P = 198$
   b) $S = -33$ et $P = 266$
   c) $S = 200$ et $P = 9999$
2. Former une équation du second degré qui admet pour solutions les nombres suivants :
   a) $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{3}$
   b) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
   c) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Exercice 5

Soient x et y deux réels non nuls. On pose : $S = x + y$ et $P = x \times y$

Calculer en fonction de S et P les réels suivants :

a) $x^2 + y^2$

b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ $\quad$ c) $\dfrac{x-5}{y} + \dfrac{y-5}{x}$ $\quad$ d) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}$

Exercice 6

Un père laisse en héritage à ses trois enfants une somme de 15 000 000 F CFA. L'ainé reçoit 500 000 F CFA de plus que le cadet qui reçoit 800 000 F CFA de plus que le benjamin.

Déterminer l'héritage de chaque enfant.

Exercice 7

Kodjo, à qui l'on demandait son âge, répondit : "Si je vis jusqu'à 100 ans, il me reste encore à vivre les $\dfrac{3}{2}$ de l'âge que j'ai".

Quel est l'âge de Kodjo ?

Exercice 8

On doit partager en parts égales une somme de 90 000 F entre un certain nombre de personnes.

S'il y avait 4 personnes de moins, la part de chacun serait augmentée de 1 250 F.

Déterminer le nombre de personnes au départ.

1.5.2 Exercices de niveau 2

Exercice 9

Pour chacun des polynôme ci-dessous :

- Vérifier que x_0 est une racine de $P(x)$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leq 0$

1. $P(x) = x^3 - x^2 + x + 3 \quad x_0 = -1$
2. $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 14x - 8 \quad x_0 = 2$
3. $P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9 \quad x_0 = 3$

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ chacun des systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x + y = 25 \\ x - 6y = -35 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \dfrac{12}{x-3} - \dfrac{5}{y+2} = 63 \\ \dfrac{8}{x-3} + \dfrac{15}{y+2} = -13 \end{cases}$
4. $\begin{cases} \dfrac{4}{2x-1} + \dfrac{3}{2(3y+2)} = 21 \\ \dfrac{5}{6x-3} - \dfrac{2}{15y+10} = 19 \end{cases}$
5. $\begin{cases} (x-3)^2 + y - 2 = 8 \\ 3(x-3)^2 + 5y - 10 = -10 \end{cases}$

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ chacun des systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = -1 \\ -3y + 2z = -4 \\ -7z = -7 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - y + 4z = -2 \\ x + 4y + 3z = -6 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -x + y + z = 3 \end{cases}$

Exercice 12

1. Résoudre l'équation
   $(E) : x \in \mathbb{R}, -x^2(-x+2) = x^2 - 4$
2. Soit le polynôme P défini par :
   $P(x) = 4 - 3x^2 + x^3$
   (a) Vérifier que les solutions de (E) sont aussi les zéros de $P(x)$.
   (b) Etudier le signe de $P(x)$, suivant les valeurs de x.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leq 0$.

3. On donne $K(x) = \dfrac{(2-x)(-x^2+x+2)}{x^2-1}$
   (a) Simplifier K sur son ensemble de définition.
   (b) Etudier le signe de $K(x)$

Exercice 13
On considère le polynôme P défini par :
$P(x) = -3x^3 - 2x^2 + 7x - 2$

1. (a) Vérifier que $\dfrac{1}{3}$ est un zéro de P.
   (b) Mettre $P(x)$ sous forme d'un produit de facteurs du premier degré.
2. (a) Etudier le signe de $P(x)$, suivant les valeurs de x.
   (b) Résoudre l'inéquation
   $(I) : x \in \mathbb{R}, (x-1)(x+2)(-3x+1) \leq 0$

Exercice 14 Résoudre graphiquement les système d'inéquations suivants :

1. $\begin{cases} x+y > 0 \\ 2x-y+1 < 0 \\ 3x+2y-2 < 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x+3y+3 \leq 0 \\ -x+y+8 \geq 0 \\ 2x-3y-12 \leq 0 \end{cases}$

1.5.3 Exercices de niveau 3

Exercice 15
On considère le polynôme P définie par : $P(x) = x^3 - 9x^2 + 6x + 16$

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que $P(x) = (x^2 - x - 2)(ax + b)$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x \in \mathbb{R}, P(x) = 0$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $P(x) < 0$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(3x-1) = 0$

Exercice 16

1. Soit le polynôme P défini par $P(x) = -x^3 + x^2 + 14x - 24$
   (a) Calculer $P(2)$ et en déduire une factorisation de $P(x)$.
   (b) Etudier le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Déduire les solutions de l'équation et inéquation suivantes :
   $-x^3 + 14x = -x^2 + 24$ $\quad - x^3 - 24 \leqslant -x^2 - 14x$

Exercice 17 On donne $P(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$

1. Calculer $P(2)$
2. Déterminer les nombres réels a, b et c pour que $P(x)$ puisse s'écrire sous la forme $P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
4. (a) Etudier le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.
   (b) En déduire l'ensemble solution de l'inéquation $P(x) < 0$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   (a) $P\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 0$
   (b) $P(x+2) \geqslant 0$.

Exercice 18 Soit la fonction polynôme P définie par : $P(x) - x^3 + 3x^2 + x - 3$

1. (a) Calculer $P(1)$
   (b) Déterminer les réels a, b et c tels que : $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $P(x) = 0$
2. (a) Étudier le signe de $P(x)$, suivant les valeurs de x.
   (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ des inéquations suivantes :
   $(I_1) : -x^3 + 3x^2 + x - 3 > 0$ $\quad (I_2) : \dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 2x - 3} < 0$

Exercice 19

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
   (a) $3x^2 + 10x - 48 = 0$
   (b) $3x(x+1) = 2(1-x)$
   (c) $-x^4 - 7x^2 + 4 = 0$
   (d) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
   (e) $\sqrt{2}x^2 + (1 - \sqrt{2})x - 1 = 0$
   (f) $(2-x)(x^2 + 3x - 4) < 0$
   (g) $-3x^2 + x + 2 \geqslant 0$
   (h) $(-6x^2 - x + 2)(x+2) \geqslant 0$
   (i) $(2-x)(x^2 + 3x - 4) < 0$
   (j) $(x+10)(-3x^2 + 5x - 4) > 0$
   (k) $\dfrac{x^2+7}{x+1} > 4$
   (l) $\dfrac{3x+5}{x} < \dfrac{2x-2}{x+3}$
   (m) $\dfrac{-x(x+1)}{x-1} < -2x$

(n) $\dfrac{-x+1}{x+1} > 0$

Exercice 5 Afin d'encourager son fils à mieux s'exercer en mathématiques, Tonton Bouba accepte de lui donner $100\,FCFA$ pour chaque exercice bien traité. Mais il lui prend $50\,FCFA$ dans le cas contraire. Après 26 exercices, le fils obtient $500\,FCFA$.

1. (a) En désignant par x le nombre d'exercices justes et par y le nombre d'exercices faux, montrer que le problème ci-dessus est équivalent au système suivant :

$$(\Sigma); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \begin{cases} x + y = 26 \\ 100x - 50y = 500 \end{cases}$$

   (b) Résoudre alors ce système et en déduire le nombre d'exercices justes et le nombre d'exercice faux.

2. Déduire les solutions des systèmes suivants :

   (a) $(\Sigma_1); (x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \begin{cases} x^2 + y = 26 \\ 100x^2 - 50y = 500 \end{cases}$

   (b) $(\Sigma_2); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 26 \\ \dfrac{100}{x} - \dfrac{50}{y} = 500 \end{cases}$

Deuxième partie

ANALYSE

CHAPITRE 2

RAPPELS SUR LES LIMITES

Sommaire

2.1 Limites de références

$\forall n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}$, On a :

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \; si \; n \text{ est pair} \\ -\infty \; si \; n \text{ est pair} \end{cases}$
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Exemple 2.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \quad \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \quad \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

2.2 Rappels sur les opérations de limites

LES TABLEAUX RÉCAPITULATIFS

Soient f et g deux fonctions numériques, l et l' sont des nombres réels, a est un nombre réel ou un infini.

Limites de la somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) =$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut pas conclure

Limites du produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	l	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (fg)(x) =$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	On ne peut pas conclure

Limites du quotient

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	$l'(l'\neq 0)$	$+\infty$	$-\infty$	$l'(l'>0)$	$l'(l'<0)$	$l'(l'>0)$	$l'(l'<0)$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Indéter.	Indéter.

D'après ces tableaux, on a quatre formes indéterminées qui sont : $-\infty+\infty$, $0\times\infty$, $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$

NB : Lorsqu'on a une indétermination, il faut transformer la fonction et calculer ensuite la limite.

Exemple 2.2. *Soit* $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ *Calculer* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

2.3 Limites en l'infini

2.3.1 Fonctions Polynômes

Les fonctions polynômes sont de la forme : $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$

- Les réels $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ sont appelés ***coefficients***.
- $a_nx^n, a_{n-1}x^{n-1}, \ldots, a_1x + a_0$ sont appelés ***monômes***.

Règle de calcul

Pour calculer la limite à l'infini d'une fonction polynôme, il suffit de calculer la limite du ***monôme*** du plus haut degré.

Exemple 2.3. *Calculer la limite en ∞ et $+\infty$ des fonctions suivantes :*

$$f(x)x^2 + 5x - 2, \qquad g(x) - 2x^3 + 4x^2 - 2$$

2.3.2 Fonctions rationnelle

Soient $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ et $Q(x) = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_1 x + b_0)$. On a :

Règle de calcul

Pour calculer la limite à l'infini d'une fonction rationnelle, il suffit de calculer la limite à l'infini du rapport des monômes du plus haut degré. C'est - à -dire :

$$\boxed{Soit\ Q(x) \neq 0\ On\ a :\ \lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}}$$

Exemple 2.4. *Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction suivante :*

$$f(x) = \frac{x^4 - x^2 - 1}{x^2 + 2}$$

Solution 2.4

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2.4 Limites à gauche, à droite en $x_0 \in \mathbb{R}$ d'une fonction

Activité 2.1. *Soit*

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

. *Etudier la limite de f en 2.*

- Calculons D_f puis posons $N(x) = x + 1$ et $D(x) = x - 2$
  On a : $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ et $N(2) = 3, D(2) = 0$. De plus :
  on a le tableau de signe de $D(x)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$D(x)$	$-$	0	$+$

- D'où

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{x+1}{x-2} = -\infty\ car \begin{cases} x+1 \to 3 > 0 \\ x-2 \to 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{x+1}{x-2} = +\infty\ car \begin{cases} x+1 \to 3 > 0 \\ x-2 \to 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$$

- Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty\ et\ \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty}$$

2.5 Exercices d'entraînement

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

1. $f(x) = -2x + 4$.
2. $f(x) = 3x - 2$.
3. $f(x) = 2x^2 - x - 3$.
4. $f(x) = -x^2 + 6 + x$.
5. $f(x) = -x^3 + 2x + 3$.
6. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

1. $f(x) = \dfrac{3x+5}{x-2}$.
2. $f(x) = \dfrac{-4x+5}{2x+1}$.
3. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+1}$.
4. $f(x) = \dfrac{-3x^2}{x-2}$.
5. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{4x^2-3}$.
6. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3-8}$.

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f en x_0.

1. $f(x) = x^3 - 4x + 1,\ x_0 = 1$
2. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+4},\ x_0 = 0$.
3. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1},\ x_0 = -1$.
4. $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x-2},\ x_0 = 2$.
5. $f(x) = \dfrac{-3}{x^2},\ x_0 = 0$.
6. $f(x) = \dfrac{x+5}{(x+3)^2}$.

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f à droite et à gauche en x_0.

1. $f(x) = \dfrac{-3x}{x+1},\ x_0 = -1$
2. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x},\ x_0 = 0$.
3. $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x-2},\ x_0 = 2$.
4. $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-1},\ x_0 = 1$.

Exercice 5

En utilisant les propriétés ds opérations sur les limites, calculer :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x - 3 + \frac{4}{x}\right) \qquad \lim_{x\to-3}\left(\frac{1}{x} - 3\right)^2$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}}\left(\frac{4}{x} - x^2\right) \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(x - \sqrt{x}\right)$$

CHAPITRE 3

CONTINUITÉS ET DÉRIVÉES

Sommaire

3.1 Continuité

Soit une fonction f et $x_0 \in D_f$. f est continue en x_0 si et seulement si :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

Exemple 3.1. *Soit $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle continue en 1 ?*

Résolution Ici $x_0 = 1$
On a : $f(1) = 1^2 - 1 = 0$ et $\lim_{x \to 1} f(x) = 1^2 - 1 = 0$. Ainsi $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$ D'où f est une fonction continue en 1.

3.2 Dérivabilité

Définition 3.1. *Soit f et fonction et $x_0 \in D_f$.*
La fonction f est dérivable en x_0 si la limite de $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ lorsque x tend vers x_0 existe et est finie (i.e $\mathbb{R}$).
Dans le cas contraire (i.e ∞), on dit que f n'est pas dérivable en x_0. Ainsi on a :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)}$$

*où $f'(x_0)$ est appelé **nombre dérivé de f en** x_0*

3.2.1 Interprétation graphique

Si $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ alors la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f admet une tangente d'équation :

$$\boxed{(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Exemple 3.2. *Soit $f(x) = x^2 + 1$. f est-elle dérivable en 1. Si oui, trouver alors l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.*

Résolution.

– Dérivabilité, on a : $f(1) = 2$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1)$$

Ainsi
$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2 = f'(1) \in \mathbb{R}$$
Par conséquent f est dérivable en 1.

– Équation de la tangente
$(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ avec $f'(1) = 2$ et $f(1) = 2$ Ainsi : $(T) : y = 2(x - 1) + 2 = 2x - 2 + 2$.
D'où $(T) : y = 2x$

3.2.2 Propriété

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0. Mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Exemple 3.3. *D'après l'exemple précédent, puisque f est dérivable en 1 donc elle est aussi continue en 1.*

3.2.3 Dérivabilité sur un intervalle

Une fonction est dérivable sur un intervalle si elle est dérivable en tout point de cet intervalle et on note : $f' : x \mapsto f'(x)$ la fonction dérivée de f

3.2.4 Dérivabilité d'un fonction composée

Soit g une fonction dérivable en x_0 et f une fonction dérivable en $g(x_0)$ alors la fonction fog est dérivable en x_0 et on a :

$$\boxed{(fog)'(x_0) = g'(x_0) \times f'[g(x_0)]}$$

3.2.5 Opération sur les fonctions dérivées

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors on a :

$(f+g)' = f' + g'$
$(f \times g)' = f' \times g + g' \times f$
$(\lambda f)' = \lambda f', (\lambda \in \mathbb{R})$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \times g - g' \times f}{g^2}, (g \neq 0)$
$(f^n)' = nf' \times f^{n-1}$
$(fog)' = g' \times f'[g]$
$(\sqrt{f})' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$, avec $f(x) > 0$

Exemple 3.4. *Déterminer la fonction dérivée de f sur l'intervalle K des fonctions suivantes.*

1. $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x+1}, K =]-1, +\infty[$
2. $g(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x}$

Résolution 3.4 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2-3)' \times (x-1) - (x-1)' \times (x^2-3}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x(x+1) - 1(x^2-3)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2+2x-x^2+3}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}. \text{ D'où } f'(x) = \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x-1)' + \frac{4' \times x - x' \times 4}{x^2} \\ &= 1 + \frac{0 - 1 \times 4}{x^2} \\ &= 1 + \frac{-4}{x^2} \\ &= \frac{x^2-4}{x^2} \text{ D'où } g'(x) = \frac{x^2-4}{x^2} \end{aligned}$$

3.3 Exercices d'entraînement

Exercice **1**
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, puis déterminer sa fonction dérivée :

1. $f(x) = -x^2 + 4x + 7$
2. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$
3. $f(x) = -4x^3 + 12x$
4. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$
5. $f(x) = x^2(1-x)$
6. $f(x) = (2x+3)(x^2-4)$

Exercice **2**
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, puis déterminer sa fonction dérivée :

1. $f(x) = \dfrac{-2x}{x+1}$
2. $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+3}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+3}$
4. $f(x) = \dfrac{-2x}{x+1}$
5. $f(x) = \dfrac{3x^2-x}{x+4}$
6. $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x-1}$

7. $f(x) = 2x + 5 + \dfrac{9}{x-2}$

***Exercice* 3**

Soit f une fonction dont la dérivée f' est définie par : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.
Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction g.

1. $g(x) = f(2x)$
2. $g(x) = f(-3x)$
3. $g(x) = f(\frac{1}{2}x - 1)$
4. $g(x) = f(-x + 4)$

CHAPITRE 4

ÉTUDES DE FONCTIONS : POLYNÔMES ET RATIONNELLES

Sommaire

4.1 Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction, on étudie d'abord les ***variations*** de cette fonction puis on la ***représente*** dans un repère.

- Pour étudier les variations d'une fonction, il faut :
  1. Déterminer son ensemble de définition.
  2. Déterminer son ensemble d'étude si possible à partir de parité ou de la périodicité.
  3. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble d'étude (ou ensemble de définition).
  4. Déterminer sa dérivée puis le signe de la dérivée.
  5. Déduire les sens de variations et le tableau de variation.
- Pour représenter graphiquement une fonction, il faut chercher :
  1. les branches infinies.
  2. les droites particulières.
  3. les éléments de symétrie et les points particuliers si possible.
  4. faire peut être un tableau de valeur puis tracer la courbe de la fonction.

4.2 Théorèmes et définitions

- ***Axe de symétrie***
  La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$ si et seulement si $\forall x \in D_f, 2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.
- ***Centre de symétrie***
  Le point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}_f$ si et seulement si $\forall x \in D_f, 2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.
- ***Parité d'une fonction***

  - Une fonction est dite ***Paire*** si et seulement si $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.
  - Une fonction est dite ***Impaire*** si et seulement si $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

4.3 Exemple d'étude d'une fonction polynôme

Étudier et représenter la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - 3x + 2 \end{array}$

4.4 Fonctions rationnelles

4.4.1 Asymptotes

Soit f une fonction, $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique et $a, b \in \mathbb{R}$.

- ***Asymptote verticale***
  Si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $(\Delta) : x = a$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.
- ***Asymptote horizontale***
  Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ alors la droite d'équation $(\Delta) : y = b$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$.
- ***Asymptote oblique***
  Si $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ alors la droite d'équation $(\Delta) : y = ax + b$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$.

4.4.2 Fonction homographique

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x - 3}{x + 1} \end{array}$

1. Etudier les variations de f.
2. Montrer que le point $\Omega(-1, 2)$ est centre de symétrie pour $(\mathscr{C}_f)$.
3. Représenter graphiquement f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4.4.3 Autre forme de fonction rationnelle

PARTIE A

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :$g(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x - 1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de g.
2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, $\forall x \neq 1 \qquad g(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 1}$.

PARTIE B

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x + 2 + \dfrac{4}{x-1}$. $(\mathscr{C}_f)$ désigne la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tel que $1cm$ représente une unité sur chaque axe.

1. Démontrer que,$\forall x \neq 1, f'(x) = \dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$.
2. (a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   (b) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et dresser le tableau de variation de f.
3. (a) Démontrer que la droite $(D) : y = x + 2$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$.
   (b) Démontrer que la dorite $(\Delta) : x = 1$ est également asymptote à $\mathscr{C}_f$.
4. (a) Montrer que le point $K(1; 3)$ est un centre de symétrie pour $\mathscr{C}_f$.
   (b) Construire $\mathscr{C}_f$ et ses asymptotes.

CHAPITRE 5

FONCTIONS LOGARITHME NÉPÉRIEN

Sommaire

5.1 Définition et propriétés

5.1.1 Définition

On appelle fonction logarithme népérien la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ s'annulant en 1 et a pour dérivée $\frac{1}{x}$.Cette fonction est notée ln et si $f(x) = ln(x)$ alors $f'(x) = \frac{1}{x}$

5.1.2 Les conséquences de la définition

- $ln(1) = 0$
- $D_{ln} =]0;+\infty[= \mathbb{R}_+^*$
- La fonction $ln(x)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $(ln(x))' = \frac{1}{x}$
  $\forall x \in]0;+\infty[, \frac{1}{x} > 0 \Longrightarrow (ln(x))' > 0$ donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
- Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad ln(a) < ln(b) \Longleftrightarrow a < b$. car ln est croissante.
  $ln(a) = ln(b) \Longleftrightarrow a = b$. Car ln est bijective.

  Remarque :
  – Si $a > 1$ alors $ln(a) > 0$
  – Si $a < 1$ alors $ln(a) < 0$
  – $ln(e) = 1$ où $e \simeq 2,718$

5.1.3 Propriétés

$\forall a > 0$ et $b > 0, \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ on a :

$$\boxed{ln(a \times b) = ln(a) + ln(b) \;\Big|\; ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - ln(b) \;\Big|\; ln(a^n) = nln(a) \;\Big|\; ln(a) = \alpha \Longleftrightarrow a = e^\alpha}$$

Exemple 5.1. .

1. *Écrire plus simplement les expressions suivantes :* $ln(2) + ln(5)$ $\quad ln(x+1) + ln(2x+4)$ $\quad ln(2) - ln(3)$ $\quad ln(x) - ln(x-1)$ $\quad 3ln(2)$ $\quad 2ln(x+1)$
2. *Déterminer x pour que* $ln(2x) = 3$; $ln(2x+3) = 2$

$.ln(2) + ln(5) = ln(10) \qquad ln(x+1) + ln(2x+4) = ln(x+1)(2x+4)$
$ln(2) - ln(3) = ln\left(\frac{2}{3}\right) \qquad ln(x) - ln(x-1) = ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \qquad 3ln(2) = ln(8)$
$2ln(x+1) = ln[(x+1)^2]$ $ln(2x) = 3 \Longleftrightarrow x = \frac{e^3}{2}$ et $ln(2x+3) = 2 \Longleftrightarrow x = \frac{e^2-3}{2}$

5.1.4 Détermination de l'ensemble de définition

Soit $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ln(U(x)) \end{array}$ où $U(x)$ est une fonction numérique.
On a $f(x) = ln(U(x))$ et

$$\boxed{D_f = \{x/x \in \mathbb{R} \, et \, U(x) > 0\}}$$

Exemple 5.2. *Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :*

$$f(x) = ln(1-3x) \qquad g(x) = ln(x^2 - x - 6)$$

$D_f = \left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$ et $D_g =]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[$

5.1.5 Équations-inéquations comportant la fonction ln

Pour résoudre les équations et inéquations faisant intervenir la fonction ln, on détermine d'abord l'ensemble de validité(de définition) de l'équation puis on utilise les ***conséquences de la définition***.

Exemple 5.3. .

1. *Résoudre les équations et inéquations suivantes :*
   (a) $ln(2x+1) = ln(x-1)$
   (b) $ln(x+3) - ln(-x-1) = 3ln2$
   (c) $ln(x+3) \geqslant ln(2x-3)$
   (d) $ln(1-x) \leqslant ln(-x) + ln(2x+5)$
2. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :* $x^2 + 3x - 4 = 0$ *puis en déduire les solutions des équations* $(ln(x))^2 + 3ln(x) - 4 = 0$ *et* $(ln(x+1))^2 + 3ln(x+1) - 4 = 0$
3. *Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système :* $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y & = & 1 \\ 5x+3y & = & 4 \end{array}\right.$ *puis en déduire la solution du système :* $\left\{\begin{array}{rcl} 2ln(x)+ln(y) & = & 1 \\ 5ln(x)+3ln(y) & = & 4 \end{array}\right.$
4. *Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système :* $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & -2 \\ xy & = & -15 \end{array}\right.$ *puis en déduire la solution du système :* $\left\{\begin{array}{rcl} ln(xy) & = & -2 \\ ln(x) \times ln(y) & = & -15 \end{array}\right.$

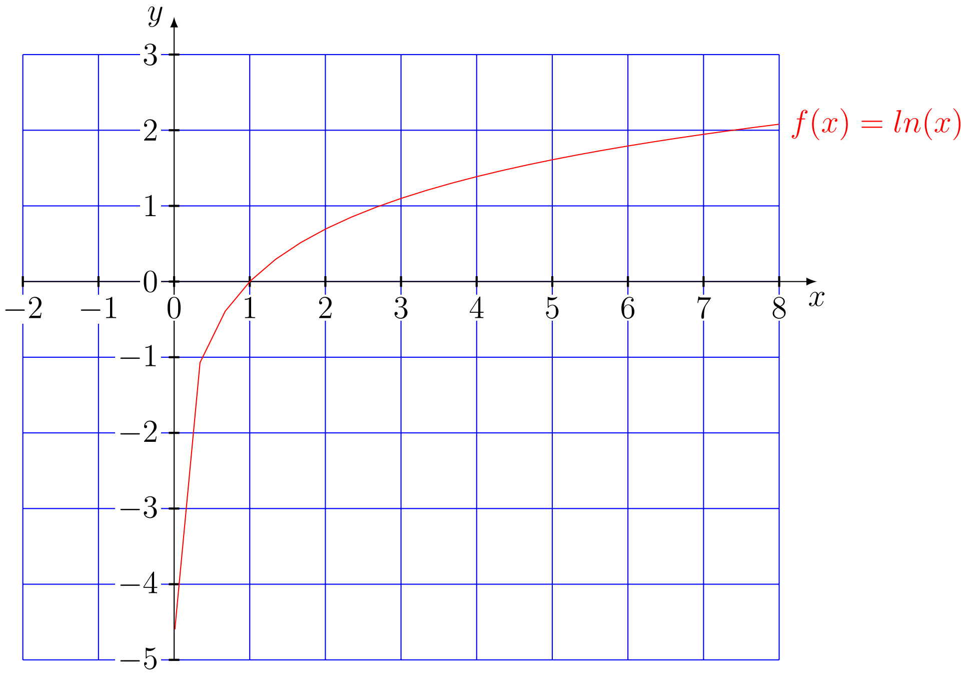
5.2 Étude de la fonction ln

Soit $f(x) = ln(x)$

1. ***Ensemble de définition***
   $D_f =]0; +\infty[$
2. ***Limites aux bornes de D_f***
   $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} ln(x) = -\infty$
   $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty$
3. ***Dérivée et sens de variation***
   f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a : $f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0, \forall x \in]0; +\infty[$ donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
4. ***Tableau de variation***

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖			$+$			
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

5. ***Branches infinies***
   $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} ln(x) = -\infty$. Donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.
6. ***Tangente en $x_0 = 1$***
   $(T_1) : y = f'(1)(x - 1) + f(1) \Longrightarrow y = x - 1$ car $f'(1) = 1$ et $f(1) = 0$.
7. Courbe



8. ***Limites à retenir***

$\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$	$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ >}} ln(x) = -\infty$
$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} xln(x) = 0$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} x^{\alpha}ln(x) = 0,\ \alpha > 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x)}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x)}{x^{\alpha}} = 0,\ \alpha > 0$
$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{ln(x)}{x-1} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(x+1)}{x} = 1$

Exemple 5.4. *Calculer les limites aux bornes de D_f des fonctions suivantes :*
$f(x) = ln(x^2+1) \qquad g(x) = ln(-x+2)$

9. ***Fonction dérivée*** Soit $f(x) = ln(U(x))$, on a :$f'(x) = \dfrac{U'(x)}{U(x)}$

Exemple 5.5. *Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :*
$f(x) = ln(x^2+4) \qquad g(x) = ln\left(\dfrac{2x+1}{1-x}\right)$

10. ***Propriétés***

(a) Si $f(x) = ln(U(x)\times V(x))$ alors $\boxed{f'(x) = \dfrac{U'(x)}{U(x)} + \dfrac{V'(x)}{V(x)}}$

(b) Si $f(x) = ln\left(\dfrac{U(x)}{V(x)}\right)$ alors $\boxed{f'(x) = \dfrac{U'(x)}{U(x)} - \dfrac{V'(x)}{V(x)}}$

Exemple 5.6. *Déterminer la fonction dérivée de :* $f(x) = ln\left((2x+1)(x^2+3)\right) \qquad g(x) = ln\left(\dfrac{2x+1}{-x+3}\right)$

5.3 Étude d'une fonction comportant ln

Activité 5.1. *Soit* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \end{array}$, *$(\mathscr{C}_f)$ désigne la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$*

1. *Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.*
2. *Calculer les limites aux bornes de D_f.*
   En déduire une asymptote à $(\mathscr{C}_f)$.
3. *Montrer que la dérivée de f est :* $f'(x) = \dfrac{-1}{(1-x)(1+x)}$.
4. *Étudier le signe de la dérivée de f puis en déduire son sens de variations.*
5. *Dresser le tableau de variation de f.*
6. *Écrire l'équation de la tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$.*
7. *Tracer l'asymptote,la tangente et la courbe $(\mathscr{C}_f)$.*

5.4 Exercices d'entraînement

ÉQUATIONS & INÉQUATIONS

Exercice 1

1. On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$.
   (a) Calculer $P(2)$; factoriser $P(x)$ pour trouver les racines de P.
   (b) Déduire de la question 1) la résolution des équations suivantes :
      i. $x \in \mathbb{R}, 2(lnx)^3 - 4ln(x^2) = -4 + (lnx)^2$.
      ii. $x \in \mathbb{R}$,
      $lnx + ln(2x^2 - x - 6) = ln(2x - 4)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
   (a) $ln(-3x + 2) < ln3$.
   (b) $ln(5 - 2x) \geqslant 0$.

Exercice 2

On considère le polynôme $P(x) = 2x^2 - 5x^2 - 4x + 3$

1. Calculer $P\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire une factorisation de $P(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   (a) $P(x) = 0$.
   (b) $2[ln(x)]^3 - 5[ln(x)]^2 - 4ln(x) + 3$.
   (c) $2ln(x) + ln(2x - 5) = ln(4x - 3)$.

Exercice 3

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
   (a) $ln(x - 2) + ln(x + 3) = 2ln(x + 1)$.
   (b) $ln(3) + ln(x - 2) + ln(x + 1) > ln(5x - 7)$.

Exercice 4

1. (a) Développer le produit !
   $A(x) = x(x - 2)(2x - 1)$.
   (b) En déduire les solutions de l'équation et d'inéquations suivantes :
   $a)$ $2[ln(x)]^3 - 5[ln(x)]^2 + 2ln(x) = 0$,
   $b)$ $2[ln(x)]^3 - 5[ln(x)]^2 + 2ln(x) \leqslant 0$
2. Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 8x^2 - 16x + 128$.
   (a) Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $P(x) = (x^2 - 16)(ax + b)$. En déduire l'ensemble solution de l'équation
   $P(x) = 0$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
   $[ln(x)]^3 - 8[ln(x)]^2 - 16ln(x) + 128 = 0$.

SYSTÈME D'ÉQUATIONS

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivantes :

1. $\begin{cases} xy = -6 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \end{cases}$ en déduire : $\begin{cases} \ln(a) \times ln(b) = \\ \frac{1}{ln(a)} + \frac{1}{ln(b)} = \end{cases}$
2. $\begin{cases} ln\left(\frac{x}{y}\right) = 1 \\ ln(x) + ln(y) = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3ln(x) - 4ln(y) = -6 \\ ln(x^2) + ln(y) = 7 \end{cases}$
4. $\begin{cases} ln(xy) = -2 \\ ln(x) \times ln(y) = -15 \end{cases}$
5. $\begin{cases} ln(x - 2) + 3ln(y - 1) = 9 \\ 2ln(x - 2) - ln(y - 1) = 4 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x - y = 1 \\ ln(x) + ln(y) = ln(12) \end{cases}$

PROBLÈMES :Fonction Logarithme

Exercice

Déterminer le domaine de définition et la dérivée des fonctions logarithmes suivantes :

1. $f(x) = ln\left(\frac{x + 4}{8 - x}\right)$
2. $f(x) = 2 + ln\left(\frac{2x - 1}{x + 1}\right)$
3. $f(x) = 2 + ln\left(\frac{x - 2}{x - 1}\right)$
4. $f(x) = \left(\frac{ln(x) - 2}{ln(x) - 1}\right)$
5. $f(x) = ln(-x - 2ln(1 - x))$
6. $f(x) = \frac{ln(x)}{1 - ln(x)}$

Problème 1

Soit la fonction numérique f de variable réelle définie par $f(x) = 2 + ln\left(\frac{x - 2}{x - 1}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
4. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
5. Démontrer que le point $S(\frac{3}{2}; 2)$ est un centre de symétrie à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ représentative de f.
6. Construire $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé.

Problème 2

1. On considère la fonction numérique de variable réelle définie par :
   $g(x) = \dfrac{x+2}{1-x}$.
   (a) Étudier suivant les valeurs de x le signe de $g(x)$.
   (b) Calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers -2 et lorsque x tend vers -1 par valeur inférieures.
   (c) Calculer la dérivée de la fonction g.
2. Soit la fonction f définie par $f(x) = ln\left(\dfrac{x+2}{1-x}\right)$
   (a) Déterminer l'ensemble de définition D de f.
   (b) Déterminer la dérivée de f et étudier son signe suivant les valeurs de x.
   (c) En déduire le sens de variation et dresser le tableau de variation de f.
   (d) Déterminer l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$.
   (e) Donner la nature et les équations cartésiennes des asymptotes à la courbe $(\mathscr{C}_f)$.
   (f) Étudier la position de $(\mathscr{C}_f)$ par à l'axe des abscisses (droite d'équation $y = 0$).
   (g) Calculer $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$, $f(-1)$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $f(0)$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ puis tracer la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et (T) dans un repère orthonormé.(Unité : $2cm$).

Problème 3

Soit la fonction f définie par $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2ln(x+1) - ln(5-x)$ et note $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer la fonction dérivée f' de f puis étudier son signe et en en déduire le sens de variation de f.
3. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x - 4 = 0$ et $2ln(x+1) - ln(5-x) = 0$.
   (b) En déduire les coordonnées des points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.
4. Écrire l'équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse 3.
5. Tracer $(\mathscr{C}_f)$ et (T).

Problème 4

On considère la fonction f définie par :
$f(x) = \dfrac{1}{4}x + ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ et on désigne par $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative.

1. Démontrer que la fonction f est impaire.
2. Que peut-on en conclure ?
3. Démontrer que la droite $(\mathcal{D})$: $y = \dfrac{1}{4}x$ est asymptote à $(\mathscr{C}_f)$.
4. Déterminer les points de $(\mathscr{C}_f)$ en lesquels les tangentes ont pour coefficient directeur $-\dfrac{5}{12}$.
5. Étudier les variations de f puis construire $(\mathscr{C}_f)$.

Problème 5

On considère la fonction f définie par :
$f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-3x-2}$ et on désigne par $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative.

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de $(\mathscr{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.
3. Montrer que ce point est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.
4. Déterminer l'équation de la tangente (T) en ce point.
5. Construire $(\mathscr{C}_f)$ et la tangente (T).
6. On considère la fonction g définie par $g(x) = ln\left(\dfrac{2x-3}{x^2-3x-2}\right)$ et on note par $(\mathscr{C}_g)$ sa courbe.
   (a) Déterminer son ensemble de définition.
   (b) Calculer les limites de g.

(c) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

(d) Construire $(\mathscr{C}_g)$.

Problème 6

Le plan est muni d'un repère orthogonal (Unité graphique : $2cm$). Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x - 1 + ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe.

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{1-x}{x} > 0$.
   (b) Déduire de question $1.a)$ l'ensemble de définition D_f de f.
2. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
3. (a) Déterminer la dérivée f' de f et étudier le signe de $f'(x)$
   (b) Dresser le tableau de variation de variation de f.
4. Montrer que la droite $(\mathcal{D}) : y = x - 1$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$. et préciser la position de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à $(\mathcal{D})$ sur les intervalles $]-\infty; 0[$ et $]1; +\infty[$.
   Préciser l'autre asymptote.
5. Construire $(\mathscr{C}_f)$ et ses asymptotes.
6. On considère la fonction g définie par :
   $g(x) = x - 1 + ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|$ et $(\mathscr{C}_g)$ sa courbe représentative.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g.
   (b) Montrer que $\forall x \in D_f ; g'(x) = f'(x)$.
   (c) Dresser le tableau de variation de g.

Problème 7

Soit f une fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2ln(x+1)$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. (a) Calculer les limites aux bornes de D_f.
   (b) En déduire que $(\mathscr{C}_f)$ admet deux asymptote verticales dont on précisera les équations.
   3. Calculer la dérivée f' de f.
   En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
   (b) en déduire que $(\mathscr{C}_f)$ admet deux extrémums en justifiant votre réponse. Préciser tout en justifiant votre réponse si ces extrémums sont des maximums ou des minimums.
4. Déterminer les équations des tangentes à $(\mathscr{C}_f)$ aux points d'abscisses respectives $x_0 = -\dfrac{1}{2}$ et $x_0 = 1$.
5. Tracer les asymptotes, les tangentes puis construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$.
6. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

CHAPITRE 6

FONCTIONS EXPONENTIELLES

Sommaire

6.1 Définition et conséquences

6.1.1 Définition

On appelle fonction exponentielle la fonction réciproque de la fonction ln.On la note exp et est définie par : $\begin{array}{rccc} exp: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & exp(x) \end{array}$

NB : On note aussi $exp(x) = e^x$

6.1.2 Conséquences

Soit $f(x) = e^x$.

• $Df = \mathbb{R}$ • $e^0 = 1$ • $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

6.2 Propriété

Soit a et b deux nombres réels.On a :

$e^a.e^b = e^{a+b}$	$\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$	$\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
$e^1 = e$	$e^{ln(a)} = a$	$ln(e^a) = a$
$(e^a)^b = e^{ab}$	$e^a = e^b \rightleftharpoons a = b$	$e^a > e^b \rightleftharpoons a > b$

Exemple

Simplifier les écritures suivantes :

A=$e^3 \times e^{-2}$ B=$(e^3)^2$ C=$\dfrac{e^3}{e^2}$

6.3 Détermination de l'ensemble de définition

Soit U une fonction numérique et f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{U(x)} \end{array}$$

$Df = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ et } U(x) \text{ existe}\}$

• Si $U(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ alors $U(x)$ existe $\rightleftarrows D(x) \neq 0$.

• Si $U(x)$ est une fonction polynôme alors $Df = \mathbb{R}$.

Exemple

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$f(x) = e^{3x^2+1}$ $g(x) = e^{\frac{x}{x^2-4}}$.

6.4 Equation-Inéquation-Système

Résoudre dans $\mathbb{R}$,

1) $e^{x+1} = e^{-2x+3}$, 2) $e^{x^2+3x} < e^{x+2}$, 3) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$, 4) $e^{2x} - e^x - 6 \geq 0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} e^x \times e^y = e^3 \\ e^{3x+2y} = e \end{cases}$ b) $\begin{cases} e^{xy} = e^6 \\ e^x \times e^y = e^5 \end{cases}$

6.5 Etude de la fonction exponentielle

6.5.1 Ensemble de définition

Soit $f(x) = e^x$. On a : $Df = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

6.5.2 Limites aux bornes de Df

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

6.5.3 Variations de f (dérivée f', signe de la dérivée et sens de variation de f)

• Dérivée :$\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = e^x$
• Signe de $f'(x)$ et sens de variation de f :$\forall x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0 \Longrightarrow f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

6.5.4 Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

6.5.5 Asymptote

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \Longrightarrow$ la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}f$ en $-\infty$.
NB : Les courbes des fonctions ln et exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Tracé de $\mathcal{C}f$

6.5.6 Les limites à retenir

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

6.5.7 Fonction dérivée

Soit $f(x) = e^{U(x)}$ où $U(x)$ est une fonction numérique. On a : $f'(x) = U'(x)e^{U(x)}$.

Exemple

Dériver les fonctions suivantes : $f(x) = e^{3x^2+2x} \qquad g(x) = e^{\frac{3x+1}{x-2}}$.

6.5.8 Etude et représentation d'une fonction contenant la fonction exponentielle

Soit la fonction fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x}{e^x - 1} \end{array}$

et $\mathcal{C}f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

1. Déterminer l'ensemble de définition Df de f.
2. Calculer les limites aux bornes de Df.
3. En déduire les asymptotes à $\mathcal{C}f$.
4. Etudier les variations de f (Dérivée $f'(x)$,signe de$f'(x)$,tableau de signe de $f'(x)$, sens de variation de f et tableau de variation).
5. Tracer les asymptotes ainsi que la courbe $\mathcal{C}f$.

6.6 Exercices d'entraînement

ÉQUATIONS & INÉQUATIONS

Exercice 1

Soit $P(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : P(x) = 0$.
2. En déduire la résolution des équations suivantes :
   (a) $e^{2x} - 8e^{-2x} = 2$.
   (b) $(lnx)^4 - 2(lnx)^2 - 8 = 0$

Exercice 2

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x = 0$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
2. En déduire la résolution des équations suivantes :
   (a) $2e^{3x} - 3e^{2x} + e^x = 0$
   (b) $2(lnx)^3 - 3(lnx)^2 + lnx = 0$

Exercice 3

Soit $P(x)$ le polynôme défini par :
$P(x) = x^3 - 8x^2 + 23x - 24$.

1. Calculer $P(3)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
   $x^3 - 24 = 8x^2 - 23x$
   puis l'inéquation $x^3 - 8x^2 + 23x - 24 \geqslant 0$.
3. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ des inéquations :
   (a) $x^3 - 8x^2 + 23x - 24 \geqslant 0$
   (b) $(ln)^3 - 8(lnx)^2 + 23lnx - 24 \geqslant 0$

Exercice 4

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ (on pourra poser $t = x^2$)
2. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ des équations et inéquations suivantes :
   (a) $(lnx)^4 - 5(lnx)^2 + 4 = 0$
   (b) $ln(5 - x) = 2ln2 - ln(x^2)$
   (c) $e^{2x} + 4e^{-2x} - 5 \geqslant 0$f

SYSTÈME D'ÉQUATIONS

Exercice 5

1. Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système d'équation suivante : $\begin{cases} 4x + y &= 6 \\ 3x - 2y &= -1 \end{cases}$
2. En déduire la solution des systèmes suivants :
   (a) $\begin{cases} 4e^x + e^y &= 6 \\ 3e^x - 2e^y &= -1 \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} 4lnx + lny &= 6 \\ ln(x^3) - ln(y^2) &= -1 \end{cases}$

Exercice 6

1. Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système d'équation suivante : $\begin{cases} x + y &= 6 \\ xy &= 9 \end{cases}$
2. En déduire la solution des systèmes suivants :
   (a) $\begin{cases} e^x \times e^y &= (e^3)^2 \\ ln(x) + ln(y) &= ln(9) \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} (e^x)^y &= (e^3)^3 \\ e^x e^y &= e^6 \end{cases}$

PROBLÈMES :Fonctions exponentielles

Problème 1 Soit la fonction numérique f de variable réelle définie par

$$f(x) = e^{-x^2}$$

.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
3. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.
4. En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
5. Déterminer l'équation de la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse $x_0 = 0$.
6. Construire $(\mathscr{C}_f)$ et sa tangente dans un repère orthonormé.

Problème 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + xe^{-x}$$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. (a) Vérifier que : $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x}$.
   (b) Calculer la dérivée f' de f et étudier son signe.
   (c) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
3. Déterminer les équations des tangentes à $(\mathscr{C}_f)$ aux points d'abscisses $x_0 = 0$ et $x_0 = 1$.
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ avec l'axe $(O, \vec{i})$.
5. (a) Compléter le tableau suivant :

x	-2	-1	0	4	6
$f(x)$					

   (b) Construire $(\mathscr{C}_f)$ et sa tangente dans un repère orthonormé.

Problème 3

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{e}{e^x - 1}$$

avec e la base du logarithme népérien($lne = 1$) et on désigne par $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Établir le tableau de variation de la fonction f.
3. Préciser les différentes asymptotes de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.
4. Tracer la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

Problème 4

Le plan est muni d'un repère orthogonal (Unité graphique : $2cm$). Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et $(\mathscr{C}_h)$ sa courbe.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de h.
   (b) Étudier la parité de h.
   (c) En déduire que $(\mathscr{C}_h)$ admet un centre de symétrie dont on précisera.
2. (a) Montrer que $\forall x \geqslant 0, h(x) = 1 + \dfrac{2}{e^x + 1}$,
   Calculer la limite de h en $+\infty$.
   (b) Montrer que $\forall x \leqslant 0, h(x) = -1 + \dfrac{e^x}{e^x + 1}$,
   Calculer la limite de h en $-\infty$.
   (c) En déduire l'équation des asymptote à $(\mathscr{C}_h)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Déterminer la dérivée h' de h puis déduire son sens de variation et son tableau de variation.
4. Construire $(\mathscr{C}_h)$

Problème 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x^2 + 3)e^{-x}$$

1. (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   (b) On admet que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^x = 0$
   Vérifier que : $f(x) = 2x^2e^x + 3e^{-x}$ puis déterminer la limite de f en ∞.
   Que peut-on dire pour la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de f ?
2. (a) Vérifier que : $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3}{e^x}$ puis montrer que $f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 4x - 3}{e^x}$
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
   (c) En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
3. Déterminer l'équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse $x_0 = 0$.
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ avec les axes du repère.
5. Tracer $(\mathscr{C}_f)$, ses asymptotes et la tangente (T).

CHAPITRE 7

SUITES NUMÉRIQUES

Sommaire

7.1 Généralité

7.1.1 Définition

On appelle suite numérique toute fonction définie de $\mathbb{N}$ ou d'une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

7.1.2 Notation

Une suite U se note :

$$U : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & U(n) \end{array} \quad \text{ou} \quad U : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & U_n \end{array}$$

Remarque

Le terme général de la suite (U_n) se note U_n.

7.1.3 Diverses notations d'une suite numérique

• Une suite peut être définie par une formule explicite.
Exemple : Soit la suite$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $U_n = 3n + 5$.
A partir de cette formule, on peut déterminer tous les termes de la suite.
Exemple : Calculer les quatre premiers termes de la suite $U_n = 3n + 5$.
• Une suite peut être déterminée par une formule de récurrence.Dans ce cas les suites de la suite se calculent de proche en proche à partir du terme précédent.
Exemple

Soit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} V_0 & = & 1 \\ V_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}V_n + 5 \end{cases}$

Calculer V_1 ; V_2 ; V_3.

7.1.4 Sens de variation d'une suite numérique

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :
– ***croissante*** si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n \geqslant 0$ ou $U_{n+1} \geqslant U_n$.
– ***décroissante*** si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$ ou $U_{n+1} \leqslant U_n$.
– ***constante*** si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = 0$ ou $U_{n+1} = U_n$.
Exemple : Etudier le sens de variation de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $W_n = -2n^2 + 2n + 3$.

7.2 Les suites particulières

7.2.1 Suite arithmétique

Définition

Une suite arithmétique est une suite de nombre ou chacun des termes sauf le premier est la somme du précédent et d'un nombre fixe appelé raison et noté **r** c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N} U_{n+1} - U_n = \mathbf{r}$ ou $U_{n+1} = U_n + \mathbf{r}$.

Terme général d'une suite arithmétique

Soit $(U_n)_{n\in I}$, $I \subseteq \mathbb{N}$ une suite arithmétique de raison **r** et de premier terme U_a, on a : $\boxed{U_n = U_a + (n-a)\mathbf{r}}$.

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit k et l deux entiers naturels tels que $k < l$. On pose : $S_{k,l} = U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \cdots + U_l$
$\boxed{S_{k,l} = \dfrac{(l-k+1)}{2}(U_k + U_l)}$.

Exemple :

$$\begin{aligned} S_n &= U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n \\ S_n &= \frac{n-0+1}{2}(U_0 + U_n) \\ S_n &= \frac{n+1}{2}(U_0 + U_n) \end{aligned}$$

Sens de variation d'une suite arithmétique de raison r

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $\mathbf{r}$.

■ Si $\mathbf{r} < 0$, la suite (U_n) est dite strictement décroissante.
■ Si $\mathbf{r} > 0$, la suite (U_n) est dite strictement croissante.
■ Si $\mathbf{r} = 0$, la suite (U_n) est constante.

Exercice d'application

Soit la suite (U_n) définie par la formule de récurrence : $\begin{cases} U_0 &= 2 \\ U_{n+1} &= U_n - 3 \end{cases}$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite.
2. Démontrer que la suite (U_n) est une suite arithmétique tout en précisant la raison et le premier terme.
3. Montrer que la suite (U_n) est strictement décroissante.
4. Exprimer U_n en fonction de n.
5. Soit $V_n = U_n + 2$. Exprimer V_n en fonction de n.
6. Soit $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$ et $S'_n = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$.
   (a) Exprimer S_n en fonction de n.
   (b) En déduire l'expression de S'_n en fonction de n.

7.2.2 Suite géométrique

Définition

Une suite géométrique est une suite de nombre ou chacun des termes sauf le premier est le produit du précédent et d'un nombre fixe appelé raison notée $\mathbf{q}$.
$\forall n \in \mathbb{N}\ \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \mathbf{q}$ ou $U_{n+1} = \mathbf{q}U_n$.

Terme général d'une suite géométrique

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $\mathbf{q}$ et de premier terme U_a. On a :
$\boxed{U_n = U_a\mathbf{q}^{n-a}}$.
$*$ Si $U_a = U_0$ alors $U_n = U_0\mathbf{q}^n$.
$*$ Si $U_a = U_1$ alors $U_n = U_1\mathbf{q}^{n-1}$.

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit k et l deux entiers naturels tels que $k < l$. On pose : $S_{k,l} = U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \cdots + U_l$.
La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique est donnée par la formule :
$\boxed{S_{k,l} = U_k \dfrac{(1-\mathbf{q}^{l-k+1})}{1-\mathbf{q}}}$.
Exemple :

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$
$$S_n = U_0 \frac{(1-\mathbf{q}^{n-0+1})}{1-\mathbf{q}}$$
$$S_n = U_0 \frac{(1-\mathbf{q}^{n+1})}{1-\mathbf{q}}$$

Sens de variation d'une suite géométrique

• Si $\mathbf{q} < 0$ les termes de la suite sont alternativement positifs et négatifs.
La suite n'est donc pas monotone.
• Si $\mathbf{q} > 0$ on a le tableau ci-dessous :

raison	premier terme	sens de variation
$0 < \mathbf{q} < 1$	$U_a > 0$	(U_n) est décroissante
	$U_a < 0$	(U_n) est croissante
$\mathbf{q} = 1$	U_a=cste	(U_n) est constante
$\mathbf{q} > 1$	$U_a > 0$	(U_n) est croissante
	$U_a < 0$	(U_n) est décroissante

N.B :
★ Soit U_1, U_2 et U_3 trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Le terme du milieu U_2 est égal à la demi-somme des termes des extrémités U_1 et U_2 c'est-à-dire $U_2 = \frac{1}{2}(U_1 + U_3)$.
★ Soit V_1, V_2 et V_3 trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Le terme du milieu V_2 au carré est égal au produit des termes des extrémités V_1 et V_2 c'est-à-dire $(V_2)^2 = V_1 \times v_3$.

7.3 Notion de limite d'une suite - convergence d'une suite

7.3.1 Limite d'une suite

Pour déterminer la limite d'une suite, il faut la mettre sous la forme explicite c'est-à-dire $U_n = f(n)$.
La limite se calcule en $+\infty$.
Exemple : Calculer la limite des suites (U_n) et (V_n) définies par : $U_n = 2n^2 + n + 1$ $\quad V_n = \dfrac{2n+1}{n^2-1}$.

7.3.2 Convergence d'une suite

–Une suite est dite **convergente** lorsqu'elle admet une limite finie c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l \in \mathbb{R}$.
–Une suite est dite **divergente** lorsqu'elle admet une limite infinie c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \pm\infty$.
Dans l'exemple précédent (U_n) diverge et (V_n) converge.
Exercice : CIAM page 104 $n^0 9$.

Remarque

– Toute suite arithmétique de raison $\mathbf{r} \neq 0$ est divergente.
– Toute suite géométrique de raison $\mathbf{q}$ telle que $-1 < \mathbf{q} < 1$ est convergente.

7.4 Raisonnement par récurrence

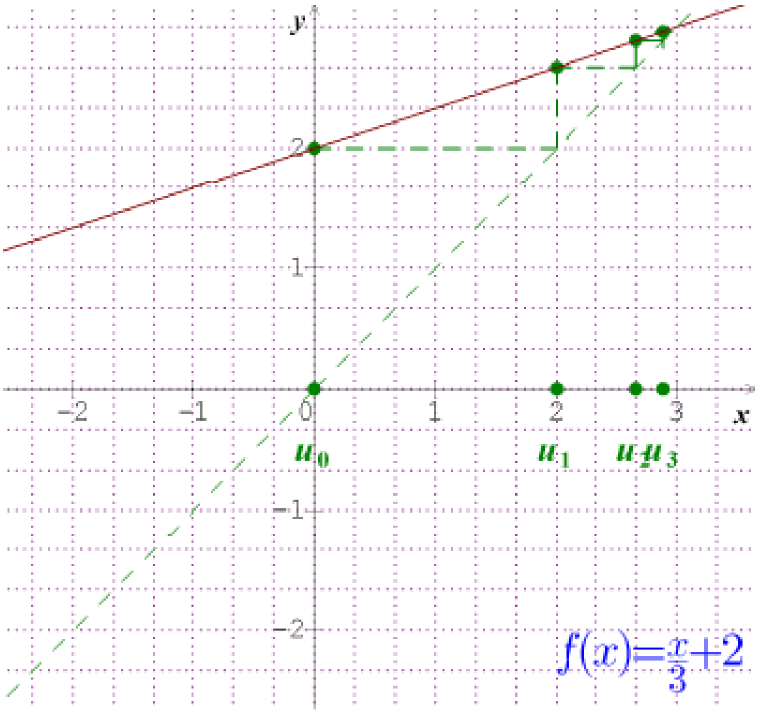
Pour démontrer qu'une proposition (P_n) est vraie quelque soit n, il suffit : – De vérifier que la proposition est vraie pour une petite valeur n_0 du rang n.
– De supposer que la proposition est vraie pour un rang $k \geqslant n_0$ et vérifier ensuite qu'elle est vraie aussi au rang $k+1$
–Conclure.

Exemple

Démontrer par récurrence que : $1+2+3+4+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

7.5 Représentation graphique des premiers termes d'une suite

Soit $(U_n) : \begin{cases} U_0 & = & 0 \\ U_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}U_n + 2 \end{cases}$
Représenter sur l'axe (OI) d'un repère orthonormé (O, I, J) les quatre premiers termes de la suite (U_n).



7.6 Suite et Vie courante :Capitalisation

La capitalisation est le prix de revient après une période de placement d'un capital.

7.6.1 Intérêt simple

Dans un placement à intérêt simple, à chaque fin de période le capital produit le même intérêt. la valeur acquise au bout de n périodes de placement est la somme du capital initial et des intérêts générés.C'est une suite arithmétique de premier terme C_0(capital initial) et de raison $\mathbf{r} = C_0 \times t\%$(intérêt généré par période avec $t\%$ le taux d'intérêt).
$\boxed{C_n = C_0 + nC_0 \times t\% = C_0 + nI, \text{ ou } I = C_0 \times t\%}$.

7.6.2 Intérêt composé

Dans un placement à intérêt composé, l'intérêt produit s'ajoute au capital initial pour donner un autre capital qui produirait ensuite un autre intérêt. La valeur acquise au bout de n périodes de placement décrit une suite géométrique de raison $\mathbf{q} = 1 + t\%$ et de premier terme C_0. dans ce cas on a :
$\boxed{C_n = C_0(1 + t\%)^n}$.

7.6.3 Exercices d'entraînement

Troisième partie

ORGANISATION DE DONNÉES

CHAPITRE 8

DÉNOMBREMENT ET PROBABILITÉ

Sommaire

8.1 Dénombrement (Rappel)

8.1.1 Tableau récapitulatif d'un tirage

Nom du tirage	**Y-a-t-il un ordre ?**	**Les éléments sont-ils nécessairement distincts ?**	**Formule de dénombrement**
Tirage successif avec remise	OUI	NON	$\boxed{\text{p-uplet } : n^p}$
Tirage successif sans remise	OUI	OUI	$\boxed{\text{Arrangement } : A_n^p}$ $(p \leqslant n)$
Tirage simultané	NON	OUI	$\boxed{\text{Combinaison } : C_n^p}$ $(p \leqslant n)$

NB : $n \equiv$ ***contenance*** ; $p \equiv$ ***nombre tiré***

♣ $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1)$ ou $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ où $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$; $0! = 1$

♣ $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

<u>Avec la calculatrice (marque Porpo)</u>

♣ $n^p \Longrightarrow$ <u>Exemple</u> : $2^6 = \boxed{2}\ \boxed{X^Y}\ \boxed{6} = 2\hat{}6 = 64$

♣ $A_n^p \Longrightarrow$ <u>Exemple</u> : $A_5^3 = \boxed{5}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{4}\ \boxed{3} = 5P3 = 60$

♣ $C_n^p \Longrightarrow$ <u>Exemple</u> : $C_7^3 = \boxed{7}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{1}\ \boxed{3} = 7C3 = 35$

♣ $n! \Longrightarrow$ <u>Exemple</u> : $5! = \boxed{5}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{7} = 5\,! = 120$

8.1.2 Activité

Une urne contient 9 boules dont 4 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules blanches. Le tirage consiste à tirer 3 boules de l'urne.

1. On tire une à une tout en remettant à chaque fois la boule tirée.
2. On tire de façon successive sans remise.
3. On tire de façon simultanée les trois boules.

Répondre aux questions a) et b) dans les cas 1), 2) et 3).
a) Quel est le nombre de façon de tirer les boules de l'urne ?
b) Quel est le nombre de façon de tirer exactement une boule noire ?

8.2 Calcul de probabilité

8.2.1 Vocabulaire

Lorsqu'on lance par exemple un dé numéroté de 1 à 6 et on attend voir le numéro que présente la face supérieure. On a 6 résultats possibles :$1; 2; 3; 4; 5; 6$.

- On dit qu'on a réalisé une expérience aléatoire ou une épreuve ;
- Les résultats possibles sont appelés des éventualités ;
- L'ensemble $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ est appelé univers associé à l'expérience aléatoire et aussi appelé événement certain ;
- Toute partie de Ω est appelée événement ($A = \{2; 4; 5\}$) ;
- On appelle événement élémentaire tout singleton de Ω ($B = \{1\}$) ;
- L'ensemble vide est appelé événement impossible ;
  Soient A et B deux événements.

- $\bar{\text{A}} = C_\Omega^A$ est appelé événement contraire de A.
- Les événements « A ou B »et « A et B » sont notés $A \cup B$ et $A \cap B$.
- Si $A \cap B = \emptyset$ alors on dit que A et B sont incompatibles.

8.2.2 Probabilité d'un événement

Définition

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. On appelle probabilité sur Ω toute application P définie par

$P : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & P(A) \end{array}$ ***i.e la probabilité d'un événement est toujours comprise entre*** 0 ***et*** 1.

Propriété

* $P(\Omega) = 1$
* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
* Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
* $P(\bar{A})= 1 - P(A)$ ou $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
* Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ alors $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_n) = P(\Omega) = 1$

8.2.3 Équiprobabilité

L'équiprobabilité signifie que tous les événements élémentaires ont la même probabilité.Les situations d'équiprobabilité sont souvent détectées par la présence des expressions :

- On tire au hasard
- Boule indiscernable au touché
- Dé non pipé,non truqué ou parfait

Dans le cas de l'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A d'un univers Ω est donné par :

$$\boxed{\frac{\text{nombre de cas favorable}}{\text{nombre de cas possible}} = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}}$$

8.3 Exercices d'entraînement

Exercice1

Une boite de craies contient six (6) bâtons blancs et cinq (5) rouges.
On prend quatre (4) bâtons au hasard dans cette boite.

1. Quelle est la probabilité qu'ils soient tous les quatre de la même couleur ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir les deux couleurs ?

Exercice 2

Les 37 élèves d'une classe de terminale A_4 se repartissent de façon suivants :

	Fille	Garçon	Totaux
Apprenant la Mathématique	18	10	
N'apprenant pas la Mathématique			9
Totaux	23		

1. Quel nom donne t-on à ce tableau ?
2. Compléter le tableau.
3. On choisit un élève de cette classe au hasard.
   (a) Quelle est la probabilité qu'il soit un garçon ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'il soit une fille ?
   (c) Quelle est la probabilité qu'il soit une fille apprenant la mathématique ?
   (d) Quelle est la probabilité qu'il soit un garçon n'apprenant pas la mathématique ?
4. L'élève choisit étant une fille, quelle est la probabilité qu'elle apprenne la mathématique ?

Exercice 3

Une urne A contient 6 boules dont trois portent le numéro 1, deux portent le numéro 2 et une le numéro 3.
Une urne B contient 4 boules dont une porte le numéro 1, une porte le numéro 2 et deux le numéro 3.
Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
On tire une boule de l'urne A et une boule de l'urne B. Quelle est la probabilité :

1. Pour qu'elles portent deux numéros différents ?

2. Pour que la somme des nombres marqués sur les deux boules soit paire ?

Exercice 4

Le programme d'un examen comporte 100 sujets dont 3, tirés au sort, sont proposés à chaque candidat. Un candidat n'ayant étudié que le quart de sujets du programme subit l'épreuve.

1. Combien de sujets ce candidat a -t-il étudié ?
2. Quelle est la probabilité que ce candidat ait étudiée :
   (a) Les trois sujets ?
   (b) Deux des trois sujets ?
   (c) Aucun des trois sujets ?
   (d) Au moins l'un des trois sujets ?

Exercice 4

Une urne contient 10 boules indiscernables au touchers dont 3 noires, 2 blanches et 5 rouges. On tire simultanément 3 boules de l'urne. On note :

1. A :« ***Le tirage comporte exactement deux boules noires.*** ».
2. B :« ***le tirage comporte une boule de chaque couleur*** ».
3. C :« ***le tirage comporte au moins une boule rouge*** ».

Calculer la probabilité de ces événements.

Exercice 5

Un sac contient 3 jetons blancs ; 2 jetons rouges ; et 5 jetons verts indiscernables au toucher.
Une épreuve consiste à tires simultanément 3 jetons du sac.Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

1. A :« ***les trois jetons tirés sont de la même couleur.*** ».
2. B :« ***les trois jetons tirés sont de*** 3 ***couleurs différentes*** ».
3. C :« ***au moins*** 2 ***jetons tirés sont de la même couleur*** ».

Exercice 6

Une urne contient six boules blanches et quatre boules noires.

1. On tire simultanément deux boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   (a) A :« ***tirer deux boules de la même couleur.*** ».
   (b) B :« ***tirer deux boules de couleur différentes*** ».
   (c) C :« ***Tirer au moins une boule blanche*** ».
2. On tire successivement et sans remise, deux boules de l'urne.Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   (a) D :« ***tirer dans l'ordre une boule blanche puis une boule noire.*** ».
   (b) E :« ***tirer deux boules de couleurs différentes*** ».

Exercice 7

On lance deux dés cubiques équilibrés. On calcule la valeur absolue de la différence des points obtenus sur la face supérieure de chaque dé. Par exemple si l'on obtient « 2 »avec un dé et « 5 »avec l'autre, le résultat correspondant est :$|2 - 5| = 3$.

1. Quels sont les différents résultats possibles ? (on peut utiliser un tableau à double entrées)
2. Quelle est la probabilité d'obtenir chacun de ces résultats ?

Exercice 8

Un sac contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. On tire simultanément 2 jetons au hasard.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Calculer la probabilité :
   (a) P pour que la différence entre les deux numéros tirés soit égale à 4.
   (b) P' pour que la somme des deux numéros tirés soit égale à 10 et que leur différence soit égale à 4.

Exercice 9

Une urne contient 6 boules, 2 noires et 4 blanches. Le tirage d'une boule noire rapporte 20 francs et le tirage d'une boule blanche ne rapporte rien.

1. Au cours d'un premier jeu, on extrait au hasard et simultanément 2 boules de l'urne. Calculer les probabilités des événements :
   (a) A :« ***ne rien gagner au cours du tirage effectué*** ».
   (b) B :« ***gagner au moins*** 20 ***francs au cours du tirage effectué*** ».
2. Au cours d'un deuxième jeu, on extrait au hasard successivement avec remise 4 boules de l'urne. Calculer les probabilités des événements :
   (a) A' :« ***ne rien gagner au cours des 4 tirages effectué*** ».

(b) B' :« ***gagner exactement*** 20 ***francs au cours des 4 tirages effectués*** ».

3. Au cours d'un troisième jeu, on extrait au hasard successivement sans remise 3 boules de l'urne. Calculer les probabilités des événements :

   (a) A'' :« ***ne rien gagner au cours des 3 tirages effectué*** ».

   (b) B'' :« ***gagner au plus*** 20 ***francs au cours des 3f tirages effectués*** ».

Exercice 10

Une urne contient une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2,trois boules numérotées 3 et quatre boules numéros 4. On tire une boule de l'urne. On note : P_1 la probabilité de tirer une boule portant le numéro 1, P_2 la probabilité de tirer une boule portant le numéro 2, P_3 la probabilité de tirer une boule portant le numéro 3, P_4 la probabilité de tirer une boule portant le numéro 4.

1. Combien y-a-t-il de boule dans cette urne ?
2. Calculer les probabilités P_1, P_2, P_3 et P_4.
3. Montrer que la suite $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
4. On pose $Q_1 = e^{P_1, Q_2 = e^{P_2}}, Q_3 = e^{P_3}, Q_4 = e^{P_4}$
   Montrer que la suite $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
5. On tire deux boules de l'urne et on désigne par :
   A l'événement « ***les deux boules tirées portent le même numéro*** ».
   Calculer la probabilité $P(A)$de l'événement A dans chacun des cas suivants :
   1^{er} cas : les deux boules sont tirées successivement sans remise de la première boule tirée avant le second tirage.
   2^{eme} cas : les deux boules sont tirées successivement avec remise de la première boule tirée avant le second tirage.
   3^{eme} cas : les deux boules sont tirées simultanément.

Exercice 11

Un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est truqué de telle manière que l'apparition du numéro 5 est deux fois "plus probable" que l'apparition des autres numéros.

1. Calculer la probabilité d'apparition de chaque numéro.
2. Dans cette question, on supposera que : $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_6 = \dfrac{1}{7}$ et $P_5 = \dfrac{2}{7}$.
   Calculer les probabilités des événements suivants :

   (a) A :« ***Obtenir un numéro pair*** ».

   (b) B :« ***Obtenir un numéro impair*** ».

Exercice 12

Un sac contient deux boules portant le numéro 1, trois boules portant le numéro 2 et cinq boules portant le numéro 3.
On tire au total deux boules : une, puis une deuxième qu'on place côte et côte. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. A :« ***La somme des numéros marqués sur les deux boules est égale à*** 5 ».
2. B :« ***La somme des numéros marqués sur les deux boules est supérieure ou égale à*** 5 ».
3. C :« ***La somme des numéros marqués sur les deux boules est supérieure ou égale à*** 2 ».
4. B :« ***La somme des numéros marqués sur les deux boules est un nombre pair*** ».

CHAPITRE 9

STATISTIQUES