Eléments de statistique inférentielle
(Tests statistiques)

Ter Tiero Elias DAH MD, PhD
AHU Santé Publique – Option Epidémiologie
Université de Ouahigouya

Plan

1. Rappels & définitions
2. Types de tests statistiques
3. Etapes du déroulement d'un test statistique
4. Exemples usuels de tests

I. Rappels & définitions

Situation de la question

Inférence statistique ou tests statistiques

- La procédure qui consiste à utiliser les informations recueillies dans l'échantillon pour déduire des résultats concernant l'ensemble de la population.
- L'inférence statistique est basée sur les paramètres statistiques utilisés en statistique descriptive pour décrire une population (moyenne, écart-type, fréquence,…) et des calculs de probabilités.
- Elle consiste à cause des fluctuations d'échantillonnage à comparer des séries de données
  - observées dans un échantillon à celles d'une population de référence ou théorique (fig. 1)
    <u>ou</u>
  - de deux ou plusieurs échantillons entre eux (fig. 2)
- Il s'agit d'un outil de comparaison statistique permettant de tirer des conclusions
- Les principales lois de distribution utilisées pour les tests statistiques sont : la loi normale centrée réduite, la loi T de Student, la loi du Khi 2 (χ^2), la loi F de Fisher.

Illustration schématique de l’objet de l’inférence statistique

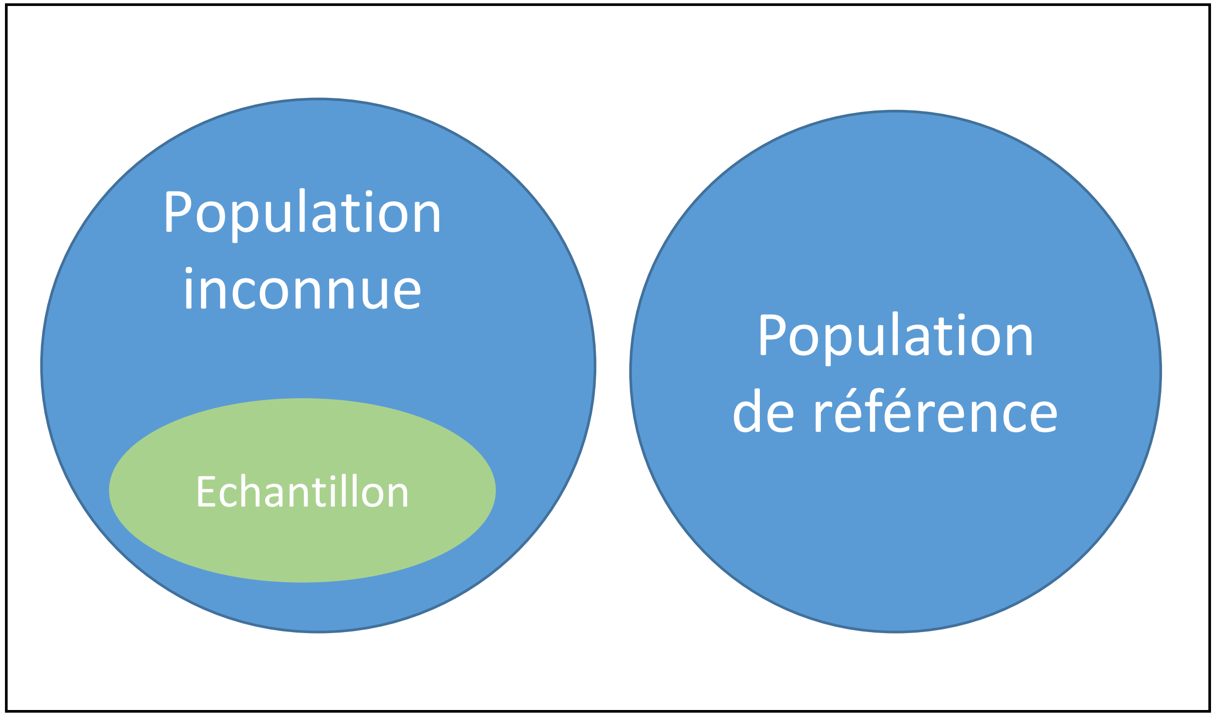


Figure 1 : comparaison d’un échantillon à une population de référence

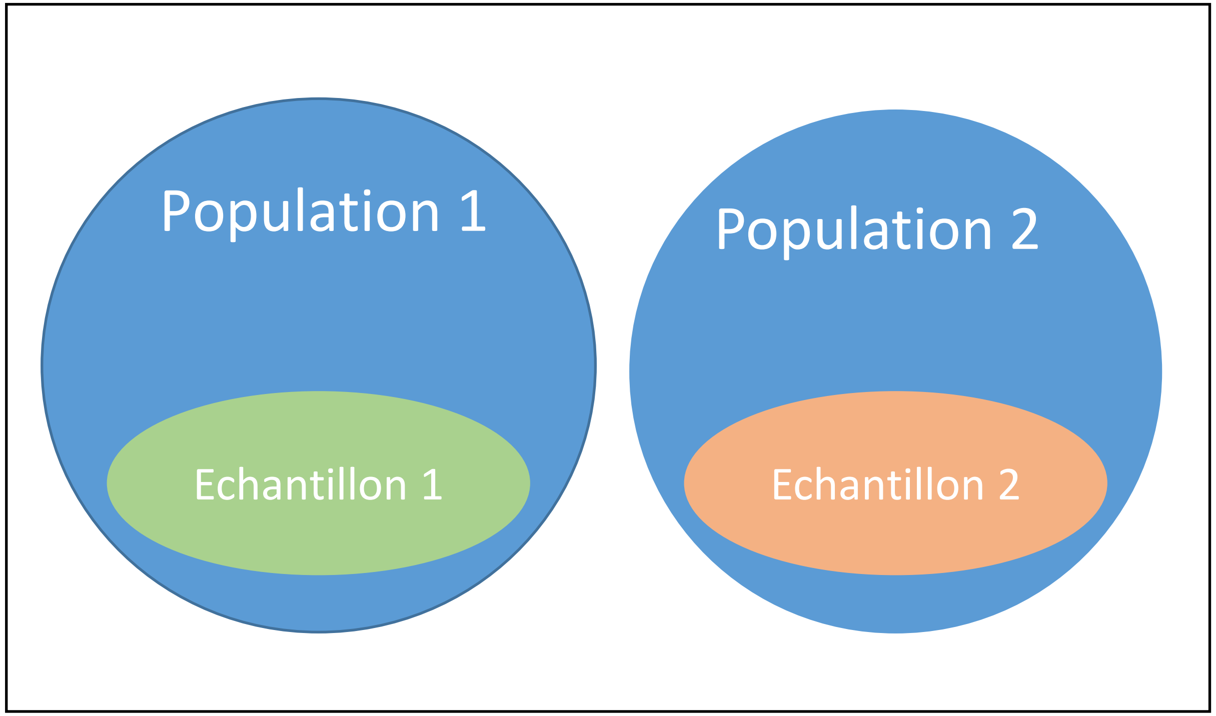


Figure 2 : comparaison de 2 échantillons

Quelques définitions

Hypothèse nulle H_0

- Hypothèse préalable à la réalisation du test. Elle suppose qu'il n'existe pas de différence entre les paramètres ou les distributions étudiées.

Hypothèse alternative H_1

- Hypothèse fixée d'avance que l'on acceptera au cas où l'on rejettera H_0 . Elle suppose qu'il existe une différence entre les paramètres ou les distributions étudiées.

Statistique de test

- C'est une variable aléatoire construite à partir des estimateurs des caractéristiques étudiées (moyenne, fréquence, variance) et dont on connaît la loi de distribution sous H_0 **.** Certaines hypothèses doivent être vérifiées (ex: normalité, n grande…) avant qu'elle ne puisse être définie.

Quelques définitions

Erreur α, ou erreur de première espèce

- Niveau d'erreur fixée d'avance. Elle indique le risque de conclure à tort à une différence alors qu'il n' y en a pas.

Erreur β, ou erreur de deuxième espèce

- Niveau d'erreur fixée d'avance. Elle indique le risque de conclure à tort qu'il n' y a pas de différence alors qu'il y'en a une.

Région critique

- C'est la définition de la zone de rejet de l'hypothèse nulle.

Valeur p, ou p-value ou petit p, ou degré de signification

- Probabilité que la survenue d'un résultat donné ne soit due au seul fait du hasard c'est-à-dire aux fluctuations d'échantillonnage.
- Sous l'hypothèse nulle, c'est la probabilité d'observer une différence au moins aussi large que celle que l'on a observé du simple fait des variations aléatoires d'échantillonnage.
- Permet de préciser le niveau de signification du test statistique, et conclure ou non à une différence selon le risque d'erreur α.

Quelques définitions

Echantillon

- Sous-ensemble d'une population pour y mesurer des paramètres inconnus.

Echantillons appariés et indépendants

Une étude peut produire des mesures appariées ou totalement indépendantes. Le test statistique doit être choisi en fonction. Par exemple, nous sommes intéressés par l'étude de **l'effet d'un traitement médical sur le taux d'insuline**. Voici deux dispositifs expérimentaux possibles permettant d'apporter une réponse à cette question :

- Le taux d'insuline est mesuré sur 30 patients avant et après le traitement médical. Les données sont donc organisées **par paires** (chaque patient est associé à deux mesures). Dans cette situation, il serait approprié d'utiliser un **test statistique pour échantillons appariés**.
- Le taux d'insuline est mesuré sur 30 patients recevant un placebo et 30 autres patients recevant un traitement médical. Dans ce cas, toutes les mesures sont indépendantes (chaque patient n'est associé qu'à une mesure unique). Dans cette situation, il serait approprié d'utiliser un **test statistique pour échantillons indépendants**.

Quelques définitions

Echantillons appariés

- L'appariement peut s'effectuer sur plusieurs échantillons ou sur plusieurs individus du même échantillon.
- On obtient des échantillons identiques, c'est à dire composés d'individus possédant des caractéristiques identiques. Les valeurs d'un échantillon influencent les valeurs de l'autre.
- La ou les caractéristiques faisant l'objet de l'appariement peuvent être les variables suivantes (âge, sexe, etc..).
- Des échantillons appariés sont de même taille. L'ensemble est composé de paires.

Echantillon indépendants

- Il s'agit de mesures réalisées sur deux ensembles d'éléments différents
- les valeurs d'un échantillon n'apportent aucune information concernant celles de l'autre

II. Types de tests statistiques

Types de tests (1)

Il existe plusieurs critères de classification des tests statistiques

- **Selon la loi de distribution du paramètre étudié**
  - **Tests paramétriques** (moyenne, médiane, variance, proportion).
    - Ils sont aussi appelés tests usuels et utilisés en premier recours et en routine
    - Ils se basent sur des distributions statistiques supposées des données (ex: loi de Student, loi normale, loi de Fisher)
    - Ils sont utilisés sous certaines conditions appelées conditions de validité du test
    - Exemples: Tests de l'écart réduit (ou loi normale), de Student, de Fisher, de Khi2.
  - **Tests non paramétriques ou tests des rangs**
    - Ils ne sont pas basés sur des distributions statistiques mais plutôt les rangs des individus classés selon la valeur des variables
    - Peuvent être utilisés même si les conditions de validité des tests paramétriques ne sont pas vérifiées
    - Exemples: Test de Mann Withney, tests de Wilcoxon.

Types de tests (2)

- **Selon l'objectif du test**
  - **Tests de comparaison**
    - Ensemble des tests statistiques dont l'objectif principal est de comparer soit
      - Des paramètres ou distributions observés à une référence
      - Des paramètres ou distributions observés sur au moins 2 échantillons distincts
  - **Tests de liaison**
    - Ensemble des tests statistiques dont l'objectif principal est de montrer la liaison (ou l'association) entre des variables qualitatives et/ou quantitatives
      - Test du χ^2 d'indépendance (2 variables qualitatives)
        - Ex : Pratique du sport (oui/non) et survenue d'une maladie CV (oui/non)
      - Test du χ^2 de tendance (une variable ordinale et une variable binaire)
        - Niveau de satisfaction vis-à-vis des soins collecté chaque 3 mois pendant un an
      - Tests de corrélation (2 variables quantitatives)

Types de tests (3)

- **Classification des tests de comparaison**
  - **Test d'ajustement, ou de conformité, ou d'adéquation**
    - Comparaison de la valeur d'un paramètre ou d'une distribution observée sur un échantillon à une valeur ou une distribution théorique, ou connue.
      - Prévalence de la Covid-19 dans un échantillon *versus* prévalence en population générale
      - TA moyenne (TAM) chez les jeunes de Ouahigouya *versus* la TAM connue chez les jeunes de Gaoua.
    - NB: On a **qu'un seul échantillon**
  - **Tests d' homogénéité**
    - Comparaison de 2 ou plusieurs distributions observées sur des échantillons
      - Test du χ^2 d'homogénéité (2 variables qualitatives)
        - Ex : Effet d'un médicament antihypertenseur mesuré par la présence ou non d'une HTA dans 2 groupes, l'un ayant reçu un dosage plus faible que l'autre.
    - On **au moins 2 échantillons**

- NB: Le test du χ^2 d'indépendance compare sur **un même échantillon** la liaison entre les distributions de 2 variables qualitatives

Types de tests (4)

- **Selon ce que l'on veut démontrer**
  - **Test bilatéral**
    - Test dont l'objectif est de montrer qu'il n'existe pas de différence entre les paramètres comparés
    - Au cas où il y' aurait une différence, le résultat du test ne permet pas de dire le sens de celle-ci.
      - Ex: Il n'existe pas de différence significative de la TA moyenne entre les jeunes de Ouahigouya et ceux de Gaoua.
      - Ex: Il existe une différence significative de la mortalité liée à la Covid-19 entre Ouagadougou et Paris.
  - **Test unilatéral**
    - Test dont l'objectif est de dire au cas où il y'aurait une différence le sens de celle-ci.
      - Ex: La mortalité liée à la Covid-19 est significativement plus élevée à Paris qu'à Ouagadougou.

Test bilatéral

Paramètre population 1 = Paramètre population 2

H_0: Pas de différence entre les paramètres

Paramètre population 1 ≠ Paramètre population 2

H_1: Existence d'une différence entre les paramètres

Test unilatéral

Paramètre population 1 = Paramètre population 2

H_0: Pas de différence entre les paramètres

Paramètre population 1 < Paramètre population 2

H_1: Paramètre 1 < Paramètre 2

OU

Paramètre population 1 > Paramètre population 2

H_1: Paramètre 1 > Paramètre 2

Types de tests (5)

- **Selon le type d'échantillon ou de série de données comparées**
  - **Test sur échantillons indépendants (ou séries indépendantes)**
    - La comparaison des paramètres ou distributions observés sont extraits d'au moins 2 échantillons différents.
      - Ex: Un groupe A reçoit un médicament X ; un groupe B en reçoit un autre Y. Les groupes A et B constituent 2 échantillons indépendants. La comparaison de l'effet de ces 2 médicaments sur une même maladie M se fera grâce à un test sur échantillons indépendants
  - **Test sur échantillons appariés (ou séries appariées)**
    - Tests comparant des paramètres ou distributions observés sur un même échantillon à 2 ou plusieurs temps différents.
      - Une mesure de la TA a été prise chez 30 patients hypertendus avant la prise d'un médicament anti HTA. Ensuite, il leur ait donné un médicament anti HTA A. Le test qui consiste à évaluer l'effet du médicament anti HTA A se fait sur un échantillon apparié.
    - Un autre exemple de séries appariées est lorsque l'on relève une caractéristique chez 2 personnes qui sont liées (Tailles du père & du fils).

III. Principes & Etapes de déroulement d'un test statistique

Principes des tests

- Un **test statistique est comparable à un procès où l'on doit décider** si une personne qui nie avoir commis un meurtre est non coupable (H_0) ou coupable (H_1). La personne est déclarée non coupable (non rejet de H_0), s'il existe un doute raisonnable sur l'auteur du meurtre (probabilité non négligeable d'obtenir les valeurs observées si H_0 est vraie). La personne est déclarée coupable si le jury considère qu'en dehors de tout doute raisonnable (faible probabilité d'obtenir les valeurs observées si H_0 est vraie) la personne a commis le crime (rejet de H_0).
- **Le test statistique est un raisonnement par l'absurde**
  - On suppose que la différence observée est due au seul hasard (fluctuations d'échantillonnage)
    - H_0 = pas de différence « significative »
  - Le test va permettre de dire si H_0 est +/- vraisemblable, avec un risque d'erreur α de se tromper (habituellement fixé à 5%)
    - Si H_0 peu vraisemblable : on la rejette
    - Si H_0 vraisemblable : on l'accepte

Etapes du déroulement

Le déroulement d'un test statistique comprend 8 étapes à suivre dans l'ordre

1. **Choix du test statistique à réaliser**
   - Il est fonction de la question posée

2. Vérification des conditions d'application du test choisi

3. Définition des hypothèses nulle & alternative

4. Choix du risque α
   - Parce que l'on sait que l'on peut se tromper, le risque d'erreur est fixé à l'avance
   - En général 5%

5. Définition de la statistique de test
   - La loi de distribution du paramètre mesuré sous l'hypothèse nulle (H_0)

6. Définition de la région critique
   - C'est la règle de décision : la zone de rejet de l'hypothèse nulle

7. Calcul de la statistique de test (application numérique)
   - Il s'agit de déterminer ce que devraient être les observations (valeurs) si H_0 était vraie
   - Le calcul est fait à partir des données observées sur le ou les échantillon(s)

8. Conclusion du test

Risques d’erreurs (1)

- Des risques d’erreurs sont à considérer lors de la mise en œuvre d’un test, surtout lors des conclusions que l’on tire.

- **Pour rappel :**

H_0 ou l’hypothèse nulle : Il n’existe pas de différence significative. Ce qui signifie que la différence observée est due au hasard (ou les fluctuations d’échantillonnage)

H_1 ou l’hypothèse alternative: il existe une différence significative, celle-ci ne pouvant pas être du fait du hasard.

- **Risques**

α : risque de 1ère espèce. Pr(rejet H_0 / H_0 vraie) ou encore la probabilité de conclure à tort à une différence significative alors qu’elle n’existe pas.

β : risque de 2ème espèce. Pr(non rejet H_0 / H_1 vraie) ou encore la probabilité de ne pas conclure à une différence significative alors qu’elle existe.

Risques d'erreurs (2)

Résumé des 4 possibilités de conclusion à l'issue d'un test statistique et en fonction de la réalité

Conclusion sur la base du test statistique	Réalité	
	Pas de différence	Différence
Non rejet de H_0	1-α Bonne conclusion	β Mauvaise conclusion
Rejet de de H_0	α Mauvaise conclusion	1-β Bonne conclusion

IV. Exemples de tests statistiques

IV.1. Comparaison d’un paramètre observée à un paramètre théorique

IV.1.1. Moyenne observée et moyenne théorique

Comparaison d'une moyenne observée et d'une moyenne théorique (1)

Exemple 1.

On considère les tailles des enfants de 1ère A de maternelle. Supposons que l'on connaisse par une vaste étude effectuée au début des années 1950 la moyenne théorique μ_0 = 98 cm de taille dans la population des enfants de 1ère A de maternelle. On voudrait vérifier l'hypothèse selon laquelle les enfants de « notre échantillon » sont issus d'une population dont la taille a pour moyenne celle que les enfants de cet âge avaient déjà dans les années 1950, c.a.d μ_0 = 98 cm en sachant que m = 100, 75 et s = 4,23.

Déroulement du test: cas des grands échantillons ($n \geq 30$)

Conditions de validité :

n doit être supérieur ou égal à 30, et X (la variable étudiée) doit suivre une loi normale

Choix des hypothèses

$H_0 : \mu = \mu_0$

H_1 (3 possibilités selon la question posée) :

Cas bilatéral : $H_1 : \mu \neq \mu_0$

Cas unilatéral : $H_1 : \mu > \mu_0$ ou $H_1 : \mu < \mu_0$

Choix d'un risque α : Généralement 5%

Comparaison d'une moyenne observée et d'une moyenne théorique (2)

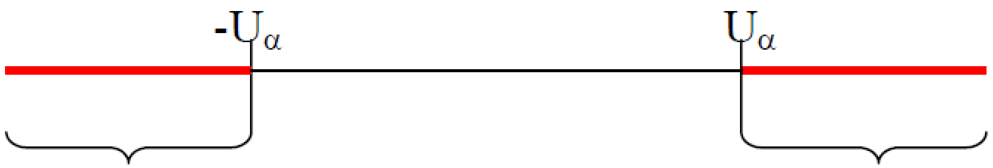
Statistique de test (SD)

Si n > 30, la moyenne M de l'échantillon suit une loi normale *N* $(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Sous H_0, $\mu = \mu_0$. On a donc $U = \frac{M-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ suit N(0,1) = c'est la variable que nous utilisons comme statistique de test

Région critique (RC)

S'il s'agit d'un **test bilatéral**, la RC est à l'extérieur de $[-U_{\alpha/2} \,;\, U_\alpha\,]$ c.a.d $]-\infty; -U_{\alpha/2}[\;\cup\;]U_{\alpha/2}; +\infty[$. U_α

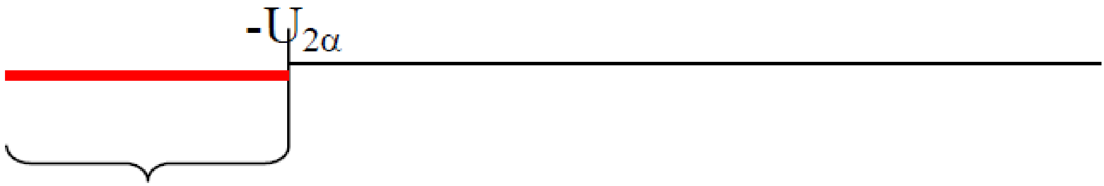


Dans le cas d'un **test unilatéral à droite** :

$]U_\alpha\,; +\infty[$ si H_1: $\mu > \mu_0$

Dans le cas d'un **test unilatéral à gauche** :

$]-\infty\,; -U_\alpha[$ si H_1: $\mu < \mu_0$



Comparaison d'une moyenne observée et d'une moyenne théorique (3)

Calcul de u, réalisation de la statistique de test sur l'échantillon observé

A l'aide des données, on calcule la moyenne de l'échantillon observé m et l'estimation de l'écart-type s pour pouvoir calculer u = $\frac{m - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

Conclusion

2 issues possibles

- Si u appartient à la RC, on rejette H_0. On conclut à une différence significative entre μ et μ_0 avec un risque d'erreur inférieur au risque choisi α. On peut éventuellement calculer le degré de signification ou p-value pour affiner l'erreur.
- Si u n'appartient à la RC, on ne rejette pas H_0. On conclut que la différence entre μ et μ_0 n'est pas significative. (Elle est due aux fluctuations d'échantillonnage).

Comparaison d'une moyenne observée et d'une moyenne théorique (4)

Résolution de l'exemple 1.

Soit X la variable aléatoire (v.a) « taille d'un enfant de 1ère A de maternelle ». On note μ sa moyenne théorique et σ son écart-type. On note μ_0 = 98 cm la moyenne de la taille des enfants de 1ère A de maternelle en 1950. On appelle M la moyenne de X sur un échantillon de taille n = 152

Conditions de validité du test

La taille de l'échantillon n = 152 ≥ 30; La variable taille de l'enfant se distribue selon une loi normale

Hypothèses du test

H_0: $\mu = \mu_0$ = 98 cm. La taille moyenne d'un enfant de 1ère A de maternelle en 1996-1997 est la même qu'en 1950.

H_1 : cas bilatéral : $\mu \neq 98$ cm. La taille moyenne d'un enfant de 1ère A de maternelle en 1996-1997 n'est plus la même qu'en 1950.

Choix d'un risque α

α= 0,05

Statistique de test

n > 30, donc U = $\frac{M-98}{\frac{S}{\sqrt{152}}}$ suit N(0,1) où S est l'estimateur de l'écart-type de la variable X calculée à partir de l'échantillon

Comparaison d'une moyenne observée et d'une moyenne théorique (5)

Région critique

Dans le cas bilatéral, la RC est]- ∞; -1,96[U]1,96; +∞[

Calcul de u, réalisation de la SD sur l'échantillon observé

m = 100,75 cm et s = 4,23. u = $\frac{100{,}75-98}{\frac{4{,}23}{\sqrt{152}}}$ = 8,01

Calcul du degré de signification (p-value)

En lisant la valeur 8,01 dans la table de la loi normale, on a $p < 10^{-9}$

NB: cette étape est facultative pour ***le cours de 6è A***

Conclusion

u appartient à la RC, on rejette donc H_0. La taille moyenne des enfants de 1ère A de maternelle en 1996-1997 est significativement différente de 98 cm ($p<10^{-9}$)

Remarque:

Si la question posée avait été « les enfants de 1ère A de maternelle de 1996 sont-ils plus grands que ceux de 1950 ? On aurait réaliser un test unilatéral. Seuls 3 éléments changent par rapport au test bilatéral

L'hypothèse alternative H_1: $\mu > 98$ cm. **La RC:**]1,64; +∞[. **La conclusion (formulation).** On rejette H_0 : La taille moyenne des enfants de 1ère A de maternelle en 1996 est significativement plus élevée que celle des enfants de 1950 (98 cm), $p<10^{-9}$

Comparaison d’une moyenne observée et d’une moyenne théorique (6)

Cas particulier

Parfois la variance, donc l’écart-type S de la variable étudiée (dans la population théorique) n’est pas connue. Dans ce cas, la SD doit correspondre à une variable qui suit une loi de Student T (n, v-1).

$$\text{Sous } H_0 \quad T = \frac{\boldsymbol{M} - \mu_0}{\frac{S\,\acute{e}chantillon}{\sqrt{n-1}}}$$

La réalisation de t dans l’échantillon est calculée pas la formule $t = \frac{\boldsymbol{m} - \mu_0}{\frac{S\,\acute{e}chantillon}{\sqrt{n-1}}}$.

La démarche est la même que pour la comparaison moyenne observée /moyenne théorique, lorsque la décision suit une loi de Student (voir point suivant du cas des petits échantillons).

Comparaison d'une moyenne observée et d'une moyenne théorique (7)

Déroulement du test: cas de petits échantillons (n < 30)

Si la taille de l'échantillon est petite, c.a.d n < 30, on ne peut pas utiliser le test précédent qui utilise une approximation de la loi normale. Alors on utilisera **le test qui utilise une approximation de la loi de Student *T* (n,ν) ν= n-1 degrés de libertés (ddl)**. Une condition supplémentaire à l'utilisation de ce test est que la v.a X doit suivre une loi normale.

Exemple 2.

Le taux normal de glycémie est 1 g/l. On dose la glycémie chez 17 diabétiques à jeun depuis 4h. La moyenne de leur glycémie est 1,2 g/l avec un écart-type de 0,10 g/l.

Peut-on dire au risque de 5%, que ces sujets sont hyperglycémiques en supposant que le taux de glycémie est distribué selon une loi normale?

Conditions de validité du test

n < 30, et la variable étudiée X (taux de glycémie) suit une loi normale

Hypothèses

H_0: $\mu = \mu_0$

H_1: $\mu > \mu_0$

Comparaison d'une moyenne observée et d'une moyenne théorique (8)

Risque α : 5%

Statistique de test

La condition X ~ loi normale étant vérifiée, on peut écrire que

Sous H_0 vraie le paramètre mesuré suit ==> *T ~ Student à v = 16*

$$\Longrightarrow \mathbf{t} = \frac{m-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}}$$

Région critique

Dans une table de Student, α = 10% et v=16, la valeur $t_{\alpha;\, n-1}$ est 1,746. RC :]1,746; +∞[

Calcul de la SD (sur nos données)

$$t_c = \frac{1{,}2-1}{\frac{0{,}1}{\sqrt{16}}} = 8$$

Conclusion

La valeur t_c = 8. Elle appartient à la région critique. On rejette H_0 , on retient par conséquent H_1. Les sujets diabétiques ont en moyenne une glycémie plus élevée que la norme habituellement permise.

IV.1.2. Fréquence observée et fréquence théorique

Comparaison d'une fréquence observée et d'une fréquence théorique (1)

Exemple 3

Le fabricant d'un médicament breveté affirme qu'il est efficace à, au moins 90% pour guérir une allergie en 8h. Dans un échantillon de 200 personnes atteintes par cette allergie, 160 ont été guéris par le médicament. Peut-on dire, en tant que patient, que l'affirmation du fabricant est légitime, au risque de 5%.

Déroulement du test: cas des grands échantillons ($n \geq 30$)

Conditions de validité :

n doit être suffisamment grand. Il faut vérifier $n\pi_0 \geq 5$ et $n(1-\pi_0) \geq 5$

X se distribue selon une loi normale

Choix des hypothèses

$H_0 : \pi = \pi_0$

H_1 (3 possibilités selon la question posée) :

Cas bilatéral : $H_1 : \pi \neq \pi_0$

Cas unilatéral : $H_1 : \pi > \pi_0$ ou $H_1 : \pi < \pi_0$

Choix d'un risque α

Généralement 5%

Comparaison d'une fréquence observée et d'une fréquence théorique (2)

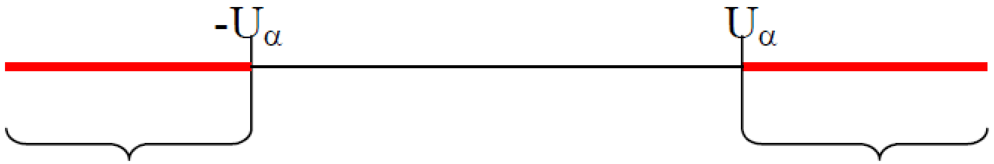
Statistique de test (SD)

$n\pi_0 \geq 5$ et $n(1-\pi_0) \geq 5$, alors on sait que la variable fréquence de l'échantillon F suit une loi normale $N\left(\pi_0, \sqrt{\pi_0(\mathbf{1}-\pi_0)/\boldsymbol{n}}\right)$.

Sous H_0, $\pi = \pi_0$. On a donc $U = \dfrac{\boldsymbol{F}-\pi_0}{\sqrt{\pi_0(\mathbf{1}-\pi_0)/\boldsymbol{n}}}$ suit N(0,1) = c'est la variable que nous utilisons comme statistique de test

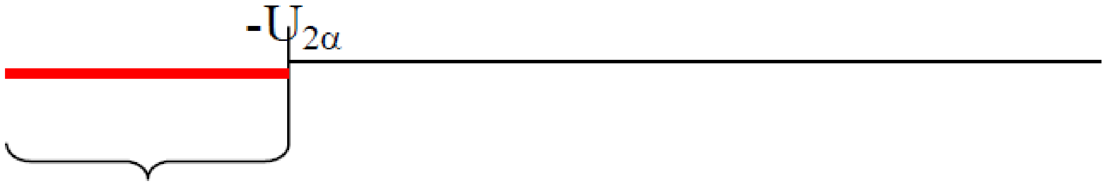
Région critique (RC)

S'il s'agit d'un **test bilatéral**, la RC est à l'extérieur de $[-U_{\alpha/2}\ ;\ U_{\alpha/2}]$: $]-\infty; -U_{\alpha/2}[\ U\ ]U_{\alpha/2}; +\infty[$



Dans le cas d'un **test unilatéral à droite** :
$]U_\alpha\ ; +\infty[$ si $H_1: \pi > \pi_0$

Dans le cas d'un **test unilatéral à gauche** :
$]-\infty\ ; -U_\alpha[$ si $H_1: \pi < \pi_0$



Comparaison d'une fréquence observée et d'une fréquence théorique (3)

Calcul de u, réalisation de la statistique de test sur l'échantillon observé

u = $\frac{f - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)/n}}$ où f *est la fréquence du caractère dans l'échantillon observé.*

Conclusion

2 issues possibles

- Si u appartient à la RC, on rejette H_0. On conclut à une différence significative entre π et π_0 avec un risque d'erreur inférieur au risque choisi α. On peut éventuellement calculer le degré de signification ou p-value pour affiner l'erreur.
- Si u n'appartient à la RC, on ne rejette pas H_0. On conclut que la différence entre π et π_0 n'est pas significative. (Elle est due aux fluctuations d'échantillonnage).

Comparaison d’une fréquence observée et d’une fréquence théorique (4)

Résolution de l’exemple 3

Variable étudiée X: variable qualitative binaire (guérison/non guérison)
Echantillon : $n = 200$; $f = 160/200 = 0,8$ (proportion de guérison)
Proportion théorique (affirmée par le fabricant): $\pi_0 = 0,90$
Problème posé: l’affirmation du fabricant est-elle vraie ? C.a.d la proportion p de guérison par le médicament est-elle plus petite que π_0?

Conditions de validité du test
La taille de l'échantillon n doit être suffisamment grande.
$n \pi_0 = 200 \times 0,9 > 5$; $n(1- \pi_0) = 200 \times 0,1 > 5$
Choix des hypothèses
H_0: $\pi = \pi_0$, la proportion de guérison est la même
H_1 : $\pi < \pi_0$, la proportion de guérison est plus petite dans l’échantillon

Comparaison d'une fréquence observée et d'une fréquence théorique (5)

Choix d'un risque α

α= 0,05

Statistique de test

$n\,\pi_0 \geq 5$ et $n(1-\pi_0) \geq 5$, la variable donc $U = \frac{F - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)/n}}$ suit N(0,1)

Région critique

Le test étant unilatéral, la RC est]- ∞; -1,64[; 1,64 est lu dans la table de loi normale

Calcul de la statistique de test

$$u_c = \frac{f - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)/n}} = \frac{0{,}8 - 0{,}9}{\sqrt{(0{,}9 \times 0{,}1)/200}} = \mathbf{-\,4{,}714}$$

Conclusion

La valeur calculée de la SD appartient à la RC. On rejette H_0 et on retient H1 . On peut conclut au risque 5% de se tromper que l'affirmation du fabricant n'est pas légitime.

Nous ne verrons le test pour le cas d'un petit échantillon ($n\,\pi_0 < 5$ et $n(1-\pi_0) < 5$)

IV.2. Comparaison de 2 paramètres observés sur échantillons indépendants

IV.2.1. Comparaison de moyennes
échantillons indépendants

Comparaison de 2 moyennes (1)

Cadre général

On considère 2 v.a X_1 et X_2 qui mesurent la même caractéristique dans 2 populations différentes P_1 et P_2. X_1 a pour moyenne théorique μ_1 et pour écart-type σ_1. X_2 a pour moyenne théorique μ_2 et pour écart-type σ_2.

A partir des estimations obtenues sur 2 échantillons de tailles respectives n_1 et n_2 issues de P_1 et P_2 , on veut tester si $\mu_1 = \mu_2$. On appelle M_1 la variable moyenne de X_1 sur un échantillon de taille n_1; M_2 la variable moyenne de X_2 sur un échantillon de taille n_2. On estimera σ_1 par l'écart-type observé s_1 et σ_2 par l'écart-type observé s_2.

Déroulement du test: cas des grands échantillons ($n_1 \geq 30$ et $n_2 \geq 30$)

Conditions de validité :

$n_1 \geq 30$ et $n_2 \geq 30$; $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (égalité des variances) ; X_1 et X_2 se distribuent selon une loi normale

Choix des hypothèses

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

H_1 (3 possibilités selon la question posée) :

Cas bilatéral : $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

Cas unilatéral : $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ ou $H_1 : \mu_1 < \mu_2$

Comparaison de 2 moyennes (2)

Choix d'un risque α

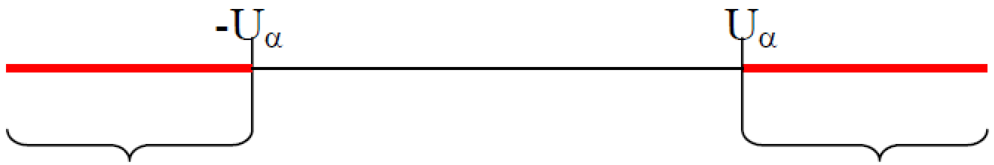
Statistique de test

Si $n_1 \geq 30$ et $n_2 \geq 30$, on sait que les moyennes d'échantillons M_1 et M_2 suivent approximativement une loi normale et que s_1^2 (respectivement s_2^2) est une bonne estimation de σ_1^2 (respectivement s_2^2).

Sous H_0 : $\mu_1 = \mu_2$ et comme la différence de 2 v.a suivant une loi normale suit encore une loi normale, on a $U = \dfrac{M_1 - M_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$ suit N(0,1) ; c'est la variable que nous choisissons comme SD

Région critique

S'il s'agit d'un **test bilatéral**, la RC est à l'extérieur de $[-U_{\alpha/2} ; U_{\alpha/2}]$: $]-\infty; -U_{\alpha/2}[\cup]U_{\alpha/2}; +\infty[$.



Comparaison de 2 moyennes (3)

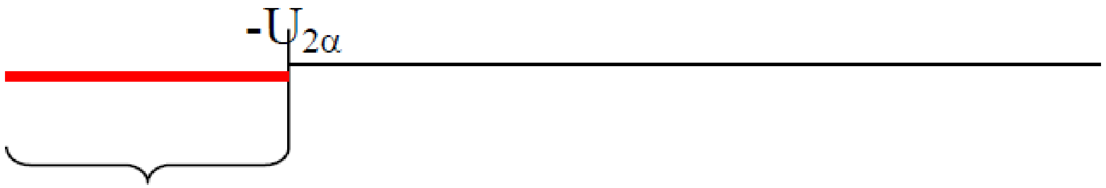
Région critique

Dans le cas d'un **test unilatéral à droite** :

$]U_\alpha\,;+\infty[$ si $H_1: \mu_1 > \mu_2$

Dans le cas d'un **test unilatéral à gauche** :

$]-\infty\,;-U_\alpha[$ si $H_1: \mu_1 < \mu_2$



Calcul u, réalisation de la SD U sur les observations

$$u = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Comparaison de 2 moyennes (4)

Conclusion

2 issues possibles

- Si u appartient à la RC, on rejette H_0. On conclut à une différence significative entre μ_1 et μ_2 avec un risque d'erreur inférieur au risque choisi α. On peut éventuellement calculer le degré de signification ou p-value pour affiner l'erreur.

- Si u n'appartient à la RC, on ne rejette pas H_0. On conclut que la différence entre μ_1 et μ_2 n'est pas significative. (Elle est due aux fluctuations d'échantillonnage).

Comparaison de 2 moyennes (5)

Exemple 1 (suite).

On considère les tailles des enfants de 1ère A de maternelle. On veut savoir si, à cet âge, les tailles moyennes des filles et des garçons sont différentes.

On a: m_1 = 101,56 cm ; s_1= 4,26 cm; m_2 = 101,56 cm ; s_2= 4,26 cm; n_1 = 81 ; n_2 =71

Soient

X_1 la variable représentant la taille d'un individu de la population P_1 des garçons

X_2 la variable représentant la taille d'un individu de la population P_2 des filles

X_1 a pour moyenne théorique μ_1 et pour écart-type σ_1 estimé par s_1

X_2 a pour moyenne théorique μ_2 et pour écart-type σ_2 estimé par s_2

M_1 la moyenne de X_1 dans un échantillon de taille n_1, M_2 la moyenne de X_2 dans un échantillon de taille n_2

Conditions de validité du test

n_1 et n_2 > 30 ; on suppose l'égalité des variances; X_1 et X_2 suivent une loi normale.

Hypothèses de validité du test

H_0: $\mu_1 = \mu_2$

H_1 : $\mu_1 \neq \mu_2$

Comparaison de 2 moyennes (6)

Risque α : On prend 0,05

Statistique de Test

n_1 et n_2 > 30, la SD U = $\dfrac{M_1 - M_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

Région critique

$$]-\infty\,;\,-1{,}96[\ \cup\ ]1{,}96\,;\,+\infty[$$

Calcul de la SD

$$u = \frac{101{,}56 - 99{,}82}{\sqrt{\dfrac{4{,}26^2}{81} + \dfrac{4{,}03^2}{71}}} = 2{,}59$$

Conclusion

u appartient à RC. On rejette H_0 . La taille moyenne des garçons de 1ère A de maternelle est significativement différente de celles des filles de cette classe avec un risque de 1ère espèce de 5%. On peut rechercher le petit p correspondant à 2,59 dans la table ($\simeq 0{,}01$)

Comparaison de 2 moyennes (7)

Déroulement du test: cas des grands échantillons ($n_1 < 30$ et $n_2 < 30$)

Quand les variances s^2_1 et s^2_2 ne sont pas connues, on calcule la variance commune S^2.

$$S^2 = \frac{(n_1-1)s^2_1 + (n_2-1)s^2_2}{n_1 + n_2 - 2}$$

S^2 = variance commune

Conditions de validité

$n_1 < 30$ et/ou $n_2 < 30$; égalité des variances; X_1 et X_2 se distribuent selon une loi normale

Statistique de test

sous H_0 , U suit une loi de Student T ($v = n_1 + n_2 - 2$)

$$T = \frac{M_1 - M_2}{\sqrt{S^2(1/n_1 + 1/n_2)}} \sim T\,(v = n_1 + n_2 - 2)$$

La suite de la démarche est la même que pour la comparaison paramètre observé /paramètre théorique, lorsque la décision suit une loi de Student.

IV.2.2. Comparaison de 2 fréquences observées échantillons indépendants

Comparaison de 2 fréquences observées (1)

Nous ne traiterons que du cas des grands échantillons ($n_1\pi_1 \geq 5$ et $n_2\pi_2 \geq 5$)

Dans le cas où $n_2\pi_2 \geq 5$ et $n_1\pi_1 \geq 5$

Données

X variable qualitative à 2 modalités étudiée sur 2 populations différentes P_1 et P_2

n_1 et n_2 , tailles des 2 échantillons extraits des 2 populations

π ,fréquence du caractère d'intérêt

f_1 ,f_2 , fréquence de cette modalité sur les échantillons

$$f = \frac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2}$$: fréquence commune sur les 2 échantillons

Conditions du test

$n_2\pi_2 \geq 5$ et $n_1\pi_1 \geq 5$;

Hypothèses

$H_0 : \pi_1 = \pi_2$

H_1 (3 possibilités selon la question posée) :

Cas bilatéral : $H_1 : \pi_1 \neq \pi_2$

Cas unilatéral : $H_1 : \pi_1 > \pi_2$ ou $H_1 : \pi_1 < \pi_2$

Choix d'un risque α

Comparaison de 2 fréquences observées (2)

Statistique de test

La SD est $U = \dfrac{F_1 - F_2}{\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n_1} + \dfrac{f(1-f)}{n_2}}} \sim N(0,1)$

Région critique

S'il s'agit d'un **test bilatéral**, la RC est à l'extérieur de $[-U_\alpha ; U_\alpha]$: $]-\infty; -U_\alpha[\cup]U_\alpha; +\infty[$.

Dans le cas d'un **test unilatéral à droite** : $]U_{2\alpha} ; +\infty[$ si $H_1: \mu_1 > \mu_2$

Dans le cas d'un **test unilatéral à gauche** : $]-\infty ; -U_{2\alpha}[$ si $H_1: \mu_1 < \mu_2$

Calcul de la réalisation de la SD U sur les données de l'échantillon

$u = \dfrac{f_1 - f_2}{\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n_1} + \dfrac{f(1-f)}{n_2}}}$ avec

$$f = \frac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2}$$

Conclusion

u appartient à la RC, rejet de H_0. Donc : $\pi_1 \neq \pi_2$

u n'appartient à la RC, non rejet H_0 . Donc : $\pi_1 = \pi_2$

Comparaison de 2 fréquences observées (3)

Exemple 4

Afin de tester un médicament, un essai clinique est réalisé en ambulatoire. Deux groupes de 40 sujets chacun sont constitués par tirage au sort.

Chaque sujet du groupe 1 reçoit le médicament alors que chaque sujet du groupe 2 reçoit un placebo. Au cours de cet essai, une épidémie de grippe s'abat sur la ville et atteint 15 sujets du groupe 1 et 9 du groupe 2.

Peut-on dire au risque de 5%, que le médicament administré augmente la susceptibilité à la contagion?

IV.3. Comparaison de distributions

Position du problème

Le problème posé peut s'exprimer de plusieurs façons

- On connaît sur un échantillon une distribution. On pose la question de savoir si celle-ci est conforme à une certaine
  - Comparaison d'une distribution observée à une distribution théorique
    - **Test d'ajustement (de conformité ou d'adéquation)**
- On connaît sur plusieurs échantillons, plusieurs distributions. On pose la question de savoir s'elles sont semblables (ou homogènes)
  - Comparaison de plusieurs distributions observées
    - **Test d'homogénéité des distributions observées**
- On a classé les individus d'un même échantillon suivant 2 caractères à 2 ou plusieurs modalités(Ex: la vaccination contre la Covid-19 & le fait d' être infecté par le Sars-Cov-2). Et l'on dénombre ceux qui présentent une certaine modalité de ces caractères (Ex: les individus vaccinés qui ont été infectés). On pose la question de savoir si ces 2 caractères sont associés (ou indépendants).
  - **Test d'indépendance ou d'association des 2 caractères**

Dans toutes ces situations on fait **un test de khi2 (χ^2) de Pearson**. La statistique est une mesure globale de l'écart. Les résultats sont présentés dans un tableau de contingence ou de distribution.

IV.3.1. Comparaison d’une distribution observée (population inconnue) à une distribution théorique

Cadre général

Soit X une v.a qualitative à k modalités. On émet l'hypothèse que X suit une loi donnée, c.a.d que chaque modalité M_i ($1 \leq i \leq k$) a une probabilité π_i de se réaliser (avec $\sum \pi_i = 1$). A partir d'un échantillon de taille n de la population, on teste la répartition de X suivant la loi donnée par les π_i . On comparera la répartition observée donnée par le tableau des effectifs observés à la répartition théorique (= répartition des n valeurs dans les k modalités de la variable si l'échantillon respectait exactement la loi théorique) donnée par le tableau des effectifs théoriques et le test permettra de savoir si la différence entre ces 2 répartitions peut être due aux fluctuations d'échantillonnage.

Déroulement du test (1)

Conditions de validité

Il faut que chacun des effectifs théoriques $n\pi_j$ soit ≥ 5

Choix des hypothèses

H_0 : il n'y a pas de différence entre les distributions observée et théorique (conformité ou adéquation)

H_1 : il y a une différence entre les distributions observée et théorique (non conformité)

Choix du risque α

Statistique de test

C'est une v.a qui mesure l'écart entre les 2 distributions (matérialisées dans les tableaux théorique et observé). Si les k effectifs théoriques $n\pi_i$ sont ≥ 5 alors la v.a

$\mathrm{Chi} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(n_j - n\pi_j)^2}{n\pi_j}$ suit la loi du χ^2 à $\nu = k-1$ degrés de liberté (k est le nombre de modalités de la variable X).

NB: Si on étudie la répartition d'une variable qualitative regroupée en classes, le nombre de ddl n'est pas forcément égal au nombre de classes moins 1. Si X suit une loi normale, le nombre de ddl v= k-1-c avec c=2

Déroulement du test (2)

Région critique

On rejette H_0 pour les grandes valeurs de Chi : la RC est] $\chi_{\alpha\nu}$; +∞[. Lue dans la table du Chi2

Calcul de la réalisation de la SD noté chi sur les données observées

Conclusion

2 issues possibles

- Si chi est dans la RC, on rejette H_0. On conclut alors que la loi suivie par la variable X est significativement différente de la loi théorique avec un risque d'erreur inférieur au risque choisi α. On peut éventuellement calculer le degré de signification ou p-value pour affiner l'erreur.
- Si chi n'est pas dans la RC, on ne rejette pas H_0. On conclut que la différence observée entre la fréquence d'échantillon et la fréquence théorique n'est pas significative. (Elle est due aux fluctuations d'échantillonnage).

Exemple (1)

Une urne A contient des boules de 4 couleurs dans les proportions suivantes : 15 % blanches, 20 % rouges, 30 % bleues, et 35 % noires. Cette urne A est placée dans une pièce près d'autres urnes contenant des boules de mêmes couleurs, mais des compositions différentes. On tire avec remise à l'aveugle, dans l'une de ces urnes un échantillon de 40 boules et l'on obtient les résultats suivants : 3 boules blanches, 10 boules rouges, 15 boules bleues, et 12 boules noires. Peut-on que dire l'échantillon provient de l'urne A ?

Résolution de l'exemple:

Selon la répartition donnée dans l'exemple , on aura le tableau des effectifs observés et théoriques suivant :

Couleurs de boules	**blanche**	**rouge**	**bleue**	**noire**
Effectifs observés (échantillon)	3	10	15	12
Effectifs théoriques	6 = (40 x 0,15)	8 = (40 X 0,2)	12 = (40 x 0,3)	14 = (40 x 0,35)

Exemple (2)

Question posée : La répartition des boules dans l'échantillon est-elle conforme à celle théorique?

Conditions du test

Tous les effectifs théoriques ($n\pi_j$) > 5

Hypothèses

H_0 : la répartition (distribution) des boules de l'échantillon est la même que celle l'urne A

H_1 : la distribution des boules de l'échantillon est différente de celle de l'urne A

Risque α : 5%

Sous Ho, la SD $\mathrm{Chi} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(n_j - n\pi_j)^2}{n\pi_j}$ suit la loi du χ^2 à 3 (= 4-1) ddl

Région critique

$\chi_{0,05,3}$ = 7,82. Donc la RC est] 7,82; + ∞ [

Calcul de la réalisation de chi :

Somme (effectifs observés – effectifs théoriques)² / effectifs théoriques)

$$\text{chi} = \frac{(3-6)^2}{6} + \frac{(10-8)^2}{8} + \frac{(15-12)^2}{12} + \frac{(12-14)^2}{14} = 3{,}04$$

Exemple (3)

Conclusion

Chi n'appartient à la RC. On ne rejette pas Ho. On conclut que la répartition de l'échantillon est conforme à celle de l'urne A. Elle a donc été tirée d'elle.

IV.3.2. Comparaison de plusieurs distributions observées (populations inconnues) : test d’homogénéité ou d’indépendance

Position du problème

Problème posé

Les tests d'indépendance et d'homogénéité sont regroupés dans le même paragraphe car tous 2 se traitent sans connaître la distribution théorique.

Première formulation

- On a constitué 2 ou plusieurs échantillons sur lesquels on a observé les distributions selon les modalités d'une variable qualitative ou selon les valeurs d'une variable quantitative discrète ou encore selon les différentes classes d'une variable continue. Le problème posé est: les distributions observées sont-elles identiques?

Deuxième formulation

- Les 2 variables qualitatives selon lesquelles on a classé les individus observés sont-elles indépendantes?

Hypothèses

H_0 : il n'y a pas de différence entre les distributions observées, ou encore les 2 variables qualitatives sont indépendantes

H_1 : il y a une différence entre les distributions observées, ou encore il existe un lien entre les 2 variables qualitatives

Déroulement du test (1)

Calcul des effectifs théoriques (1)

Modalités de X_1	Modalités de X_2						Total
	modalité 1	modalité 2		modalité j		modalité C	
modalité 1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1j}	...	n_{1C}	$n_{1\cdot}$
modalité 2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2j}	...	n_{2C}	$n_{2\cdot}$
modalité i	n_{i1}	n_{i2}	...	n_{ij}	...	n_{iC}	$n_{i\cdot}$
modalité L	n_{L1}	n_{L2}	...	n_{Lj}		n_{LC}	$n_{L\cdot}$
Total	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	...	$n_{\cdot j}$	...	$n_{\cdot C}$	n

n_{ij} représente l'effectif des personnes de l'échantillon qui ont à la fois la modalité i de la variable X1 et la modalité j de la variable X2. Le sous-total $n_{i\cdot}$ (appelé effectif marginal) représente le nombre de personnes qui ont la modalité i de la variable X1. L'effectif total de l'échantillon est n.

Déroulement du test (2)

Calcul des effectifs théoriques (2)

$$n_{i.} = \sum_{j=1}^{C} n_{ij} \qquad n_{.j} = \sum_{i=1}^{L} n_{ij} \qquad n = \sum_{i=1}^{L} n_{i.} = \sum_{j=1}^{C} n_{.j} = \sum_{1 \le i \le L} \sum_{1 \le j \le C} n_{ij}$$

A partir des effectifs marginaux du tableau observé on calcule les effectifs théoriques t_{ij} du tableau attendu sous l'hypothèse d'indépendance encore appelé tableau de contingence théorique par la formule

$$t_{ij} = (n_{i.} \times n_{.j})/n$$

Déroulement du test (3)

Hypothèses à vérifier
Chacun des effectifs théoriques t_{ij} doit être supérieur ou égal à 5. Il faut donc commencer par calculer le tableau des effectifs théoriques à partir du tableau de contingence observé. Ces hypothèses ne peuvent être vérifiées que dès lors que les hypothèses nulle et alternative ont été définies, car les effectifs théoriques sont calculés sous H0.

Choix de l'hypothèse nulle H0 et de l'hypothèse alternative H1

H_0 : les variables X1 et X2 sont indépendantes.
H_1 : les variables X1 et X2 ne sont pas indépendantes

Que peut-on faire si l'un au moins des effectifs théoriques est inférieur à 5 ?

On peut, si le nombre de modalités des variables le permet, regrouper certaines modalités pour avoir des effectifs plus grands. Bien sûr il faudra regrouper ces modalités de manière judicieuse en regroupant celles qui se ressemblent : typiquement si une des variables est issue d'une variable quantitative regroupée en classes, on regroupera des classes qui se suivent.
Si à la fin, on arrive à un tableau 2x2 avec l'un au moins des effectifs théoriques toujours inférieur à 5, on pourra utiliser le test du χ^2 avec correction de Yates si les effectifs ne sont pas trop petits (tous supérieurs à 2,5) ou dans tous les cas le test exact de Fischer

Déroulement du test (4)

Choix d'un risque α.

Statistique de test

Si tous les effectifs théoriques sont supérieurs ou égaux à 5, alors la statistique de test CHI définie par

$$CHI = \sum_{1 \leq i \leq L\,;\, 1 \leq j \leq C} \frac{(n_{ij} - t_{ij})^2}{t_{ij}}$$ suit une loi du χ^2 à $\nu = (L-1)\times(C-1)$ degrés de liberté.

L= ligne. C= colonne

Région critique

On rejettera pour des grandes valeurs de la statistique de test : $]\chi_{\alpha,\nu}\,; +\infty[$. Lue dans la table du Chi2

Déroulement du test (5)

Calcul de chi, réalisation de la statistique de test CHI sur les données observées

Conclusion

Il y a deux conclusions possibles :

- si chi est dans la région critique, on rejette l'hypothèse nulle H0. On conclut que les deux variables sont liées avec un risque de première espèce α. On peut affiner ce risque en calculant la p-value.
- si chi n'est pas dans la région critique, on en déduit qu'il n'y a pas de lien significatif entre les deux variables.

Exemple (1)

Dans l'essai thérapeutique Ditrame (1990-1994), un groupe de femmes enceintes avaient reçu le T ARV (AZT), et l'autre le placebo. L'une des questions principales était de savoir si le traitement a un effet sur le statut VIH de l'enfant. Si ce n'est pas le cas alors le statut VIH de l'enfant est indépendant du traitement suivi par la mère.

Le croisement des variables « traitement reçu par la mère » et « Statut VIH de l'enfant » est montré dans le tableau de « contingence » observé ci-dessous :

	Statut VIH		
Traitement	VIH+	VIH-	Total
AZT	41	152	193
Placebo	59	139	198
Total	100	291	391

Exemple (2)

Construction du tableau des effectifs théoriques

le nombre attendu d'enfants infectés par le VIH dans le groupe traité par l'AZT est

t_{11}= 193x100/391= 49,36

le nombre attendu d'enfants infectés par le VIH dans le groupe qui a reçu le placebo est

t_{21} = 198x100/391= 50,64

le nombre attendu d'enfants non-infectés dans le groupe traité par l'AZT est

t_{12}= 193x291/391= 143,64

le nombre attendu d'enfants non-infectés dans le groupe qui a reçu le placebo est

t_{22} = 198x291/391= 147,36

	Statut VIH		
Traitement	VIH+	VIH-	Total
AZT	49,36	143,64	193
Placebo	50,64	147,36	198
Total	100,00	291,00	391

Exemple (3)

Choix de l'hypothèse nulle H0 et de l'hypothèse alternative H1

H0 : Le statut VIH de l'enfant est indépendant du groupe de traitement suivi par sa mère.

H1 : Le statut VIH de l'enfant est lié au groupe de traitement suivi par sa mère.

Hypothèses à vérifier

Chacun des effectifs théoriques est supérieur à 5.

Remarque : Nous donnons bien sûr une formulation de bon sens des hypothèses H0 et H1 mais d'un point de vue strictement statistique, le rôle des deux variables en jeu est symétrique et le statisticien pourrait tout à fait formuler son hypothèse H0 de la manière suivante : " le groupe de traitement de la mère est indépendant du statut VIH de son enfant".

Choix d'un risque α : Nous prendrons $\alpha = 0,05$.

Statistique de test

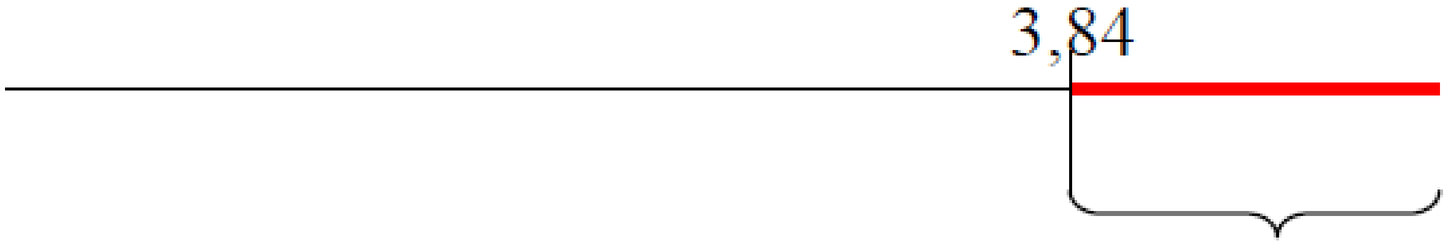
Tous les effectifs théoriques sont supérieurs ou égaux à 5, la variable aléatoire

$$CHI = \sum_{1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 2} \frac{(n_{ij} - t_{ij})^2}{t_{ij}} \text{ suit une loi du } \chi^2 \text{ à 1 degré de liberté.}$$

Exemple (4)

Région critique

On rejettera pour des grandes valeurs de la statistique de test : $]3{,}84\ ;+\infty[$



Calcul de chi, réalisation de la statistique de test CHI sur les données observées

$$\text{chi} = \frac{(41-49{,}36)^2}{49{,}36} + \frac{(152-143{,}64)^2}{143{,}64} + \frac{(59-50{,}64)^2}{50{,}64} + \frac{(139-147{,}36)^2}{147{,}36}$$

$$= 1{,}416 \quad + 0{,}486 \quad + 1{,}380 \quad + 0{,}474$$

$$= 3{,}756$$

Conclusion

chi n'est pas dans la région critique, on ne peut pas conclure à un lien significatif entre le traitement de la mère et le statut VIH de l'enfant.

Test du χ^2 d'homogénéité (1)

Rappel: Quand faut-il choisir de le réalise?

Lorsque l'on désire comparer les distributions observées entre **plusieurs** échantillons d'une variable qualitative nominale à **plusieurs** classes. Si la variable est binaire, le test revient à comparer plusieurs pourcentages

Exemple: Le test de dépistage du VIH est proposé systématiquement lors d'une grossesse. On désire savoir si la fréquence d'acceptation de ce test varie selon la religion de la femme enceinte. Un échantillon de 3 608 femmes est étudié.

		Religion				
		A	B	C	D	Total
Test VIH effectué ?	Oui	477 (77,9%)	1746 (75,0%)	248 (53,2%)	135 (66,8%)	2 606
	Non	135	582	218	67	1 002
Total		612	2 328	466	202	3608

Test du χ^2 d'homogénéité (2)

Construction du tableaux des effectifs théoriques

2 606 x 612 / 3 608 = 442,0
2 606 x 2 328 / 3 608 = 1 681,5
2 606 x 466 / 3 608 = 336, 6
2 606 x 202/ 3 608 = 145,9

1 002 x 612 / 3608 = 170,0
1 002 x 2 328 / 3608 = 646,5
1 002 x 466 / 3608 = 129,4
1 002 x 202 / 3608 = 56, 1

		Religion				
		A	B	C	D	Total
Test VIH effectué ?	Oui	442	1681,5	336,6	145,9	2 606
	Non	170	646,5	129,4	56,1	1 002
Total		612	2 328	466	202	3608

Test du χ^2 d'homogénéité (3)

Conditions du test

Tous les effectifs théoriques sont > 5

Hypothèses

H0 : La fréquence d'acceptation du test est identique quelle que soit la religion.

H1 : La fréquence d'acceptation du test est différente selon la religion.

Choix d'un risque α : Nous prendrons α = 0,05.

Statistique de test

Tous les effectifs théoriques sont supérieurs ou égaux à 5, la variable aléatoire

Sous H0

$$\text{Chi} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(n_j - n\pi_j)^2}{n\pi_j} \text{ suit la loi du } \chi^2$$

à **3** = (4-1) (2- 1 ddl

Région critique

$\chi_{0,05,3}$ = 7,82. Donc la RC est] 7,82; + ∞ [

Test du χ^2 d'homogénéité (4)

Calcul de la réalisation de chi

Somme (effectifs observés – effectifs théoriques)² / effectifs théoriques)

$$\text{chi} = \frac{(447-442)^2}{442} + \frac{(135-170)^2}{170} + \frac{(1\,746-1\,681{,}5)^2}{1\,681{,}5} + \frac{(582-646{,}5)^2}{646{,}5} + \frac{(248-336{,}6)}{336{,}6}$$

$$+ \frac{(218-129{,}4)^2}{129{,}4} + \frac{(135-145{,}9)}{145{,}9} + \frac{(67-56{,}1)}{56{,}1} = 2{,}77 + 7{,}21 + 2{,}47,\ 6{,}44 + 23{,}3 + 60{,}7 + 0{,}81$$

$+ 2{,}12 = 105{,}8$

Conclusion

La valeur de la SD appartient à la RC. On rejette donc H0 . On peut conclure que la fréquence de réalisation du test VIH est différente selon la religion de la femme enceinte. Elle est moins fréquente chez les femmes de confession religieuse C

Merci pour votre attention

Documents ressources

1. François Dabis, Jean Claude Desenclos. Epidémiologie de terrain. Méthodes et applications 2017
2. Simone Benazeth, Michel Boniface, Catherine Demarquilly, Virginie Lasserre, Mohamed Lemdani, Ioannis Nicolis. Biomathémathiques. Analyses, algèbre, probabilités, statistiques. Pharmacie, Médecine 1ère & 2ème années, Masson. 2001
3. Institut National de Veille Santitaire. Recommandations pour la représentation des résultats au DES. Juillet 2015
4. Jean Bouyer. Méthodes statistiques. Médecine-Biologie. 2017.
5. Thierry Ancelle. Statistique-Epidémiologie, 4ème édition. 2017.